



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Conjuntos notables en la Teoría Geométrica de la Medida

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

*Autor:* Jose Manuel de Frutos Porras

*Tutor:* Fernando Soria

Curso 2017-2018



## Resumen

En los últimos años, los “fractales” se han vuelto enormemente populares, ya sea en el arte o como modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos. Si bien de alguna manera es posible apreciar tales objetos con poco conocimiento de la matemática subyacente, una comprensión de esta mejorará su apreciación.

Carathéodory siguiendo las ideas de Lebesgue, introduce en 1914 su “medida exterior”. En particular define la medida “unidimensional” en espacios euclideos  $n$ -dimensionales, indicando que las medidas  $s$ -dimensionales se pueden definir análogamente para  $s$  entero. Es entonces cuando Hausdorff señala que la definición de medida exterior es también interesante para  $s$  no entero, introduciendo así el concepto de conjuntos de medida fraccionaria y el nombre de Hausdorff es adoptado tanto para la medida como para la dimensión asociada. Desde entonces se han realizado una gran cantidad de avances sobre la medida de Hausdorff y la geometría de los conjuntos Hausdorff-medibles.

En esta memoria abordaremos la noción de medida y dimensión de Hausdorff e introduciremos métodos para calcularla. Posteriormente haremos una breve introducción a la teoría geométrica de la medida. Caracterizaremos geoméricamente los conjuntos fractales usando la medida de Hausdorff. Hablaremos para ello de nociones tales como densidad y conjunto regular. También estudiaremos la dimensión y medida de Hausdorff de las proyecciones de conjuntos del plano. Gracias a las herramientas desarrolladas, finalmente estudiaremos algunos conjuntos notables. Primero trabajaremos con conjuntos auto-similares, luego estudiaremos una construcción de un conjunto de Besicovitch en el plano. Finalmente analizaremos los conjuntos de Julia.

## Abstract

In the last few years fractals have become enormously popular as an art form and as a model of wide variety of physical phenomena. Whilst it is possible in some ways to appreciate fractals with little knowledge of their mathematics, an understanding of the mathematics that can be applied to such a diversity of objects certainly enhances one’s appreciation.

Taking the ideas of Lebesgue, Carathéodory introduced in 1914 “the outer measure”. In particular he defined “1-dimensional” measure in  $n$ -dimensional Euclidean space, indicating that  $s$ -dimensional measure might be defined similarly for other integers  $s$ . Hausdorff pointed out that Carathéodory’s definition was also of value for non-integral  $s$ . Thus the concept of sets of fractional dimension was born, and Hausdorff’s name was adopted for the associated dimension and measure. Since then a tremendous amount has been discovered about Hausdorff measures and the geometry of Hausdorff-measurable sets.

In the present work, we approach the notion of Hausdorff measure and dimension. We also introduce some methods to calculate the Hausdorff dimension. Then we introduce the basis of the Geometric measure theory. We geometrically characterize

fractal sets using Hausdorff measure and we discuss notions like density and regular sets. Later, we examine the dimension and the Hausdorff measure of the projection of sets of the plane. Last, we study some remarkable sets: first, we deal with self-similar sets, then we build a set of Besicovitch type in the plane and, finally, we analyse the properties of Julia sets.

# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción y preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Medida y dimensión de Hausdorff</b>	<b>3</b>
2.1	Medida de Hausdorff . . . . .	3
2.2	Propiedades de la medida de Hausdorff . . . . .	5
2.3	Dimensión de Hausdorff . . . . .	6
2.4	Propiedades de la Dimensión de Hausdorff . . . . .	7
2.5	Resultados generales para el cálculo de dimensiones . . . . .	8
2.5.1	Métodos básicos . . . . .	8
2.5.2	Subconjuntos de medida finita . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Teoría Geométrica de la Medida</b>	<b>11</b>
3.1	Propiedades Básicas de Densidad . . . . .	11
3.2	Estructura de los 1-conjuntos . . . . .	13
3.3	Proyección de Fractales . . . . .	16
3.3.1	Proyección de conjuntos arbitrarios del plano . . . . .	16
3.3.2	Proyección de 1-conjuntos en el plano . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>19</b>
4.1	Conjuntos definidos por auto-similitudes . . . . .	19
4.1.1	Esquema de funciones iteradas . . . . .	19
4.1.2	Dimensión de conjuntos auto-similares . . . . .	21
4.1.3	Calculo de la dimensión Hausdorff de conjuntos notables . . . . .	23
4.2	Dualidad y el problema de Kakeya . . . . .	24
4.3	Iteración de funciones complejas. Conjuntos de Julia . . . . .	27
4.3.1	Teoría general de los conjuntos de Julia . . . . .	27
4.3.2	Funciones Cuadráticas. El conjunto de Mandelbrot . . . . .	32
	<b>Apéndices</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Dimensión Topológica</b>	<b>37</b>
<b>B</b>	<b>Dimensión de Minkowski</b>	<b>39</b>
B.1	Dimensión de Minkowski . . . . .	39
B.2	Propiedades de la Dimensión de Minkowski . . . . .	41
<b>C</b>	<b>Teorema de recubrimiento de Vitali y desigualdad isodiamétrica</b>	<b>43</b>
<b>D</b>	<b>Método de la Teoría de Potencial</b>	<b>45</b>
<b>E</b>	<b>Programas para el cómputo del conjunto de Mandelbrot</b>	<b>47</b>
E.1	Código Base . . . . .	48

---

E.2	Numpy . . . . .	49
E.3	Operaciones con array Numpy . . . . .	50
E.4	Numexpr . . . . .	51
E.5	Numba . . . . .	52
E.6	Numba Guvectorize . . . . .	53
E.7	PyOpenCl . . . . .	54
E.8	Conclusiones . . . . .	56
<b>F</b>	<b>Conjuntos de Julia de funciones Cuadráticas</b>	<b>57</b>

## CAPÍTULO 1

# Introducción y preliminares

---

En el pasado, los matemáticos estudiaban el conjunto de funciones para las cuales los métodos clásicos del cálculo diferencial e integral podían ser aplicados. En general los objetos que no fueran suficientemente regulares o suaves eran considerados patológicos y eran ignorados.

Pero en 1875 el matemático Du Bois-Reymond llamó la atención a la comunidad científica sobre una extraña función propuesta por Weierstrass que era continua en todo punto pero que sin embargo no tenía aparentemente derivada en ningún punto.

Aparecieron entonces curvas como las de Peano y Hilbert que eran capaces de “llenar” todo el plano. Esto daba lugar a una paradoja pues desde el punto de vista de la geometría euclídea al ser una curva debería tener dimensión uno, pero al “llenar” todo el plano tendría dimensión dos.

Poincaré bautizó a este conjunto de objetos como “galería de monstruos” [12, p. 9]. La comunidad matemática centró sus esfuerzos en estudiar estos nuevos objetos llenos de irregularidades. Comentaba Hermite en una carta dirigida a su amigo Stieljes “...abandono con espanto y horror esta lamentable plaga de funciones sin derivada...” [12, p. 36]. Poincaré comentaba a su vez “...cuando inventaba una nueva función, estaba en vista de alguna meta conveniente; ahora se inventan intencionadamente para poner los defectos de los razonamientos a nuestros padres.” [11, p. 973].

Aparte de servir de contraejemplo, el interés de estos objetos es evidente. Los conjuntos irregulares proporcionan una representación más fidedigna de muchos fenómenos de la naturaleza. Un claro ejemplo de ello es el movimiento Browniano (movimiento aleatorio que se observa en las partículas que se hallan en un medio fluido). En el estudio de este último, Norbert Wiener construyó un modelo matemático totalmente irregular (ver [18, p. 38-39]). Como dice Mandelbrot en la introducción de [12], la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de la geometría euclídea o el cálculo diferencial de Newton.

Todos estos objetos extraños se suelen llamar con el término fractal, acuñado por Mandelbrot [12, p. 4-5]. Fractal proviene del adjetivo latino “fractus” y el correspondiente verbo “frangere” que significa “quebrar”, crear fragmentos irregulares. No hay una definición matemática rigurosa de un objeto fractal, Mandelbrot define en [12, p. 15] un fractal como un conjunto con dimensión de Hausdorff -introduciremos el con-

cepto de dimensión Hausdorff en el capítulo 2- estrictamente mayor que su dimensión topológica (noción intuitiva de dimensión, ver apéndice A). Sin embargo esta definición no es satisfactoria pues excluye muchos conjuntos que claramente tienen una estructura “fractal”.

Sin embargo como ya hemos discutido, cada uno de estos objetos patológicos es tan peculiar que es complicado, casi imposible dar una definición que sea válida para todos ellos. Así que siguiendo a [5] en su introducción, describimos estos conjuntos señalando propiedades que tienen en común:

Sea  $F$  un conjunto referido como fractal. Entonces  $F$  posee algunas de estas propiedades:

- (a)  $F$  tiene una estructura fina, es decir posee detalles a una escala arbitraria.
- (b)  $F$  es demasiado irregular para ser descrito con el uso de la geometría euclídea tradicional tanto localmente como globalmente.
- (c)  $F$  posee alguna forma de auto-similitud aunque sea aproximada o estadística.
- (d) Su dimensión Hausdorff es mayor que la dimensión topológica.
- (e)  $F$  se puede generar de una forma muy simple, a veces recursiva.

La teoría geométrica de la medida es la herramienta para el estudio de dichos objetos. La geometría fractal se apoya principalmente en la teoría de la medida usando principalmente como medida la llamada medida de Hausdorff. Gracias a los trabajos de principalmente Besicovitch sea crea toda un serie de herramientas que permiten caracterizar estos conjuntos extraños.

En la presente memoria estudiaremos en el capítulo 2, el concepto de medida de Hausdorff así como sus propiedades. A continuación definiremos la dimensión de Hausdorff y analizaremos sus características. Al final del capítulo enunciaremos algunos resultados que facilitan el cálculo de la dimensión de Hausdorff.

En el capítulo 3, haremos una breve introducción a la teoría geométrica de la medida. Trabajaremos con  $s$ -conjuntos y definiremos primero los conceptos de densidad y de conjunto regular e irregular. Veremos que todo conjunto fractal se puede descomponer en un conjunto regular y en un conjunto irregular. Después haremos un estudio más detallado de los conjuntos con dimensión de Hausdorff 1. Al final de este capítulo estudiaremos la medida y la dimensión de Hausdorff de proyecciones de conjuntos.

Finalmente en el cuarto capítulo, estudiaremos conjuntos notables haciendo uso de las herramientas del capítulo 2 y 3, así como de la teoría de los sistemas dinámicos. Primero estudiaremos conjuntos auto-similares, es decir conjuntos construidos como unión de copias similares. Daremos un método para calcular de forma rápida la dimensión Hausdorff de estos conjuntos. Luego construiremos un conjunto de Besicovitch en el plano (i.e., un conjunto del plano con un segmento en todas las direcciones y con área cero). En este capítulo analizaremos también los conjuntos de Julia de funciones polinómicas. Concluiremos que todos los conjuntos de Julia tienen propiedades muy interesantes y son muy complejos. Por último, definiremos el conjunto de Mandelbrot y daremos algunas características de él.



## CAPÍTULO 2

# Medida y dimensión de Hausdorff

---

El concepto de dimensión nace con Euclides y sus “Elementos”, en ellos ya se define implícitamente y de forma inductiva el concepto de dimensión (véase [4, libro. I, cap. I] definiciones iniciales). Se dice que una figura es unidimensional si su frontera está compuesta de puntos; bidimensional, si está compuesta de curvas y tridimensional, si está compuesta de superficies. Sin embargo esta definición tan sencilla de dimensión no permite determinar el tamaño real de conjuntos tan complejos como los fractales. Es necesario definir una nueva noción de dimensión.

Existen muchas formas de caracterizar la dimensión de un fractal. La definición de Hausdorff basada en la construcción de Caratheodory es la más antigua de todas y quizás la más importante. La dimensión de Hausdorff tiene la ventaja de definirse para cualquier conjunto y es matemáticamente muy conveniente al basarse en las medidas las cuales son relativamente fáciles de manipular. Una gran desventaja es que en muchos casos es complicada de calcular o incluso de estimar. Sin embargo para entender matemáticamente los fractales, es esencial la familiaridad con la medida y la dimensión de Hausdorff.

En esta capítulo definiremos primero la medida exterior de Hausdorff y a continuación veremos que se trata de una medida si la restringimos a la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel. Veremos también que la medida de Hausdorff es invariante bajo traslaciones y rotaciones y estudiaremos su comportamiento ante dilataciones. Después, analizaremos la relación entre la medida  $n$ -dimensional de Lebesgue y la medida  $n$ -dimensional de Hausdorff, con  $n$  entero. Más adelante, definiremos la dimensión Hausdorff y estudiaremos las propiedades de esta nueva noción de dimensión para posteriormente proporcionar unos resultados que permitirán estimar esta cantidad.

### 2.1. Medida de Hausdorff

En esta sección daremos la definición de medida exterior de Hausdorff y comprobaremos que se trata de una medida sobre la  $\sigma$ -álgebra de los Borel. La medida exterior de Hausdorff  $s$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  se define como una extensión natural de la definición de la medida exterior de Lebesgue  $\mathcal{L}_n$ . Para un “grado de resolución”  $\delta > 0$  se recubre el conjunto  $F$  mediante conjuntos arbitrarios de diá-

metro no mayor que  $\delta$  y se evalúa el “tamaño”  $s$ -dimensional del recubrimiento. Se escoge la suma “más eficaz”, que se denomina  $\mathcal{H}_s^\delta$ . La medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff se define entonces como el límite cuando la resolución se hace cero.

Recordamos primero la noción de diámetro de un conjunto e a continuación definimos la medida exterior Hausdorff  $s$ -dimensional.

**Definición 2.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto no vacío. Se define el diámetro de  $U$  como  $|U| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in U\}$ .

**Definición 2.2.** Sea  $s \geq 0$  un número real. Definimos la  $s$ -medida exterior de Hausdorff  $\mathcal{H}_s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  para cada  $F \subset \mathbb{R}^n$ , como

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_s^\delta(F),$$

donde  $\mathcal{H}_s^\delta(F)$  está definido como:

$$(2.2) \quad \mathcal{H}_s^\delta(F) = \inf\left\{\sum_k |E_k|^s : F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \text{ con } E_k \subset \mathbb{R}^n \text{ y } |E_k| \leq \delta \forall k\right\}.$$

$\mathcal{H}_s(F)$  está bien definida pues el ínfimo es una función monótona creciente conforme  $\delta$  decrece a 0, por tanto el límite existe aunque puede valer  $\infty$ .

Ahora verificamos que  $\mathcal{H}_s$  cumple las propiedades de medida exterior:

**Teorema 2.3.**  $\mathcal{H}_s$  es una medida exterior.

*Demostración.* Debemos probar que (a)  $\mathcal{H}_s(F) \geq 0$ , (b) Si  $A \subset B$  entonces se tiene  $\mathcal{H}_s(A) \leq \mathcal{H}_s(B)$  y (c)  $\mathcal{H}_s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_s(F_i)$ . De las tres propiedades que hay que verificar la única que no es inmediata es la tercera.

Fijemos  $\delta$  y para cada  $i$  tomemos un recubrimiento  $\{E_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$  de  $F_i$  por conjuntos de diámetro menor o igual que  $\delta$  tales que  $\sum_k |E_{i,k}|^s \leq \mathcal{H}_s^\delta(F_i) + \epsilon/2^i$ . Como  $\bigcup_{i,k} E_{i,k}$  es un recubrimiento de  $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$  por conjuntos de diámetro menor que  $\delta$ :

$$\mathcal{H}_s^\delta(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_s^\delta(F_i) + \epsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_s(F_i) + \epsilon.$$

Como  $\epsilon$  es arbitrario, la desigualdad  $\mathcal{H}_s^\delta(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_s(F_i)$  sigue siendo cierta. Haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$  probamos la subaditividad de  $\mathcal{H}_s$ .  $\square$

**Teorema 2.4.**  $\mathcal{H}_s$  es una medida si la restringimos a la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel.

*Demostración.*  $\mathcal{H}_s$  es una medida exterior en la que los cubos son conjuntos medibles. Luego por el teorema de Carathéodory  $\mathcal{H}_s$  es una medida si la restringimos a la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel.  $\square$

La restricción de la  $s$ -medida exterior de Hausdorff  $\mathcal{H}_s$  a la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel da una medida llamada medida  $s$ -dimensional de Hausdorff.

A continuación estudiamos las propiedades de la nueva medida que acabamos de introducir.

## 2.2. Propiedades de la medida de Hausdorff

Estudiamos el comportamiento de nuestra nueva medida bajo traslaciones, rotaciones y dilataciones.

**Teorema 2.5.** *La medida de Hausdorff es invariante bajo traslaciones y rotaciones:*

$$(2.3) \quad \mathcal{H}_s(F + h) = \mathcal{H}_s(F), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

$$(2.4) \quad \mathcal{H}_s(rF) = \mathcal{H}_s(F), \quad \text{donde } r \text{ es una rotación de } \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Es inmediato una vez que se observa que el diámetro de un conjunto  $F$  es invariante bajo traslaciones y rotaciones.  $\square$

Estudiamos el comportamiento de la medida de Hausdorff sometida a dilataciones.

**Teorema 2.6.** *Si  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$  entonces:*

$$(2.5) \quad \mathcal{H}_s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}_s(F),$$

donde  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ .

*Demostración.* Se observa que para un conjunto  $F$  se tiene que  $|\lambda F| = \lambda^n |F|$ .  $\square$

Ahora establecemos la relación entre la  $s$ -medida de Hausdorff en  $\mathbb{R}^n$ , con  $s = n$ , y la medida de Lebesgue.

**Teorema 2.7.** *Si  $F \subset \mathbb{R}^n$  entonces  $\mathcal{L}_n(F) = c_n \mathcal{H}_n(F)$ , donde  $c_n = \pi^{\frac{n}{2}} / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$ .*

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$  podemos recubrir  $F$  por una colección de conjuntos cerrados convexos  $\{U_i\}$  tales que  $\sum |U_i|^n < \mathcal{H}_n(F) + \epsilon$ . Usando la desigualdad isodiamétrica (ver apéndice C) tenemos  $\mathcal{L}_n(U_i) \leq c_n |U_i|^n$ , luego  $\mathcal{L}_n(F) \leq \sum \mathcal{L}_n(U_i) < c_n \mathcal{H}_n(F) + c_n \epsilon$ . Obtenemos  $\mathcal{L}_n(F) \leq c_n \mathcal{H}_n(F)$ .

Por otro lado, sea  $\{C_i\}$  una colección de cubos que recubren  $F$  tales que:

$$(2.6) \quad \sum_i V(C_i) < \mathcal{L}_n(F) + \epsilon,$$

donde denotamos por  $V(C)$  el volumen del cubo  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Es decir si  $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  (con  $a_i < b_i$  para cada  $i$ ), entonces  $V(C) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$ .

Podemos suponer que los cubos son abiertos, basta con ampliarlos un poco mientras se conserva la desigualdad. Para cada  $i$  las bolas cerradas contenidas en  $C_i$  con radio menor o igual que  $\delta$  forman una clase de Vitali. Luego por el teorema de recubrimiento de Vitali C.3 (a), existe una colección de bolas disjuntas  $\{B_{i,j}\}_j$  en  $C_i$  de diámetro, como mucho  $\delta$ , con  $\mathcal{H}_n(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) = 0$  y por tanto con  $\mathcal{H}_n^\delta(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) = 0$ .

Como  $\mathcal{L}_n$  es una medida de Borel en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}_n(B_{i,j}) = \mathcal{L}_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) \leq \mathcal{L}_n(C_i)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^\delta(F) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\delta(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\delta(B_{i,j}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\delta(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |B_{i,j}|^n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_n^{-1} \mathcal{L}_n(B_{i,j})^n \\ &\leq c_n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_n(C_i) < c_n^{-1} \mathcal{L}_n(F) + c_n^{-1} \epsilon. \end{aligned}$$

por 2.6. Se tiene finalmente que  $c_n \mathcal{H}_n^\delta(F) \leq \mathcal{L}_n(F) + \epsilon$  para todo  $\epsilon$  y  $\delta$ , obtenemos entonces  $c_n \mathcal{H}_n^\delta(F) \leq \mathcal{L}_n(F)$ . □

### 2.3. Dimensión de Hausdorff

En esta sección extenderemos la noción intuitiva de dimensión usando la medida de Hausdorff. Gracias a esta herramienta podremos evaluar de manera precisa el tamaño de un conjunto fractal.

**Teorema 2.8.** *Si  $\mathcal{H}_s(F) < \infty$  y  $\beta > s$ , entonces  $\mathcal{H}_\beta(F) = 0$ . Si  $\mathcal{H}_s(F) > 0$  y  $\beta < s$ , entonces  $\mathcal{H}_\beta(F) = \infty$ .*

*Demostración.* Si  $|E| \leq \delta$ , y  $\beta > s$ , entonces:

$$|E|^\beta = |E|^{\beta-s} |E|^s \leq \delta^{\beta-s} |E|^s.$$

Por tanto, si  $\mathcal{H}_s(F) < \infty$  y  $\beta - s > 0$ ,

$$\mathcal{H}_\beta^\delta(F) \leq \delta^{\beta-s} \mathcal{H}_s^\delta(F) \leq \delta^{\beta-s} \mathcal{H}_s(F).$$

Tomando límite  $\delta \rightarrow 0$  se tiene que  $\mathcal{H}_\beta(F) = 0$ .

Análogamente, si  $\beta < s$  y  $\mathcal{H}_s(F) > 0$  obtenemos  $\mathcal{H}_\beta(F) = \infty$ . □

**Definición 2.9.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  conjunto de Borel, entonces por 2.8 existe un único  $s$  tal que:

$$(2.7) \quad \mathcal{H}_\beta(F) = \begin{cases} \infty, & \text{si } \beta < s, \\ 0, & \text{si } \beta > s. \end{cases}$$

En otros términos,

$$(2.8) \quad s = \sup\{\beta : \mathcal{H}_\beta(F) = \infty\} = \inf\{\beta : \mathcal{H}_\beta(F) = 0\}.$$

Se dice entonces que  $F$  tiene dimensión Hausdorff  $s$ .

En seguida estudiamos las principales propiedades de la medida de Hausdorff.

## 2.4. Propiedades de la Dimensión de Hausdorff

La dimensión de Hausdorff verifica las propiedades que cabría esperar de cualquier definición razonable de dimensión.

La mayoría de las propiedades siguientes se obtienen directamente, damos una indicación en aquellas más complicadas de probar.

**Propiedad 2.1** (Monotonía). *Si  $E \subset F$  entonces  $\dim_H E \leq \dim_H F$ .*

**Propiedad 2.2** (Estabilidad Numerable). *Si  $F_1, F_2, \dots$  es una sucesión numerable de conjuntos entonces  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \{\dim_H F_i\}$ .*

*Demostración.* Por monotonía se tiene  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_i$  para cada  $i$ . Por otro lado si  $s > \dim_H F_i$  para todo  $i$ , entonces  $\mathcal{H}_s(F_i) = 0$ , luego  $\mathcal{H}_s(\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i) = 0$ . Obtenemos así la desigualdad en el sentido contrario.  $\square$

**Propiedad 2.3** (Invarianza Geométrica). *Sea  $f$  es una traslación, rotación, simetría o una aplicación afín de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\dim_H f(F) = \dim_H F$ .*

**Propiedad 2.4** (Conjuntos Numerables). *Si  $F$  es un conjunto finito o numerable, entonces  $\dim_H F = 0$ .*

**Propiedad 2.5** (Conjuntos abiertos). *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  un abierto, entonces  $\dim_H F = n$ .*

**Teorema 2.10.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  verifica una condición Lipschitz con exponente  $\gamma$ :*

$$(2.9) \quad \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^\gamma,$$

entonces:

$$(a) \quad \mathcal{H}_{s/\gamma}(f(F)) \leq M^{s/\gamma} \mathcal{H}_s(F),$$

$$(b) \quad \dim_H f(F) \leq \frac{1}{\gamma} \dim_H F.$$

*Demostración.* (a) Supongamos que  $\{E_k\}$  es una familia numerable de conjuntos que recubren  $F$ . Entonces  $\{f(F \cap E_k)\}$  recubre  $f(F)$  y,  $f(F \cap E_k)$  tiene un diámetro menor que  $M|E_k|^\gamma$ . Se sigue:

$$\sum_k |f(F \cap E_k)|^{s/\gamma} \leq M^{s/\gamma} \sum_k |E_k|^s.$$

Concluimos inmediatamente (a)

(b) Si  $s > \dim_H F$  entonces tenemos  $\mathcal{H}_{s/\gamma}(f(F)) \leq M^{s/\gamma} \mathcal{H}_s(F) = 0$ , esto implica por tanto que  $\dim_H f(F) \leq s/\gamma \quad \forall s \geq \dim_H F$ .

$\square$

Establecemos a continuación la relación entre la dimensión Topológica (idea intuitiva de dimensión, ver apéndice A) y la dimensión de Hausdorff.

**Teorema 2.11.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  de Borel. Se tiene:*

$$\dim_T F \leq \dim_H F.$$

*Demostración.* La prueba supera los objetivos del trabajo. Es debida a Nöbeling para subconjuntos del espacio Euclideo. Para más detalles ver [8, p. 107].  $\square$

## 2.5. Resultados generales para el cálculo de dimensiones

Un intento de calcular la dimensión de Hausdorff para casi cualquier conjunto convencerá rápidamente de las limitaciones prácticas de uso de la definición. En esta sección enunciaremos teoremas para el cálculo de la dimensión que posteriormente usaremos de forma reiterada.

### 2.5.1. Métodos básicos

Para la mayoría de los fractales podemos obtener estimaciones superiores recubriéndolos simplemente por conjuntos pequeños.

**Teorema 2.12** (Principio de distribución de masa). *Sea  $\mu$  una distribución de masa sobre  $F$  y supongamos que para algún  $s$  existen  $c > 0$  y  $\delta > 0$  tal que:*

$$(2.10) \quad \mu(U) \leq c|U|^s,$$

para todo conjunto  $U$  con  $|U| \leq \delta$ . Entonces  $\mathcal{H}_s(F) \geq \mu(F)/c$  y además:

$$s \leq \dim_H F.$$

*Demostración.* Si  $\{U_i\}$  es un recubrimiento cualquiera de  $F$  entonces:

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

Tomando ínfimos,  $\mathcal{H}_s^\delta(F) \geq \mu(F)/c$ , con  $\delta$  suficientemente pequeño, entonces  $\mathcal{H}_s(F) \geq \mu(F)/c$ .  $\square$

El principio de la distribución de masa proporciona una rápida cota inferior para la dimensión de Hausdorff.

**Teorema 2.13.** *Sea  $\mu$  una distribución de masa en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Borel y sea  $0 < c < \infty$  una constante.*

(a) *Si  $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s < c \forall x \in F$  entonces  $\mathcal{H}_s(F) \geq \mu(F)/c$ .*

(b) *Si  $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s > c \forall x \in F$  entonces  $\mathcal{H}_s(F) \leq 10^s \mu(\mathbb{R}^n)/c$ .*

*Demostración.* (a) Para cada  $\delta > 0$  sea:

$$F_\delta = \{x \in F : \mu(B_r(x)) < (c - \epsilon)r^s \text{ para todo } 0 < r \leq \delta \text{ para algún } \epsilon > 0\}.$$

Sea  $\{U_i\}$  una  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  y luego de  $F_\delta$ . Luego cada  $U_i$  contiene un punto  $x$  de  $F_\delta$  y la bola  $B$  con centro en  $x$  y radio  $|U_i|$  contiene  $U_i$ . Por definición de  $F_\delta$ ,

$$\mu(U_i) \leq \mu(B) < c|U_i|^s,$$

luego

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_i \{\mu(U_i) : U_i \cap F_\delta \neq \emptyset\} \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

Como  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento cualquiera de  $F$  se sigue  $\mu(F_\delta) \leq c\mathcal{H}_s^\delta(F) \leq c\mathcal{H}_s(F)$ . Pero como  $F_\delta \rightarrow F$  cuando  $\delta \rightarrow 0$  se tiene  $\mu(F) \leq c\mathcal{H}_s(F)$  por continuidad de la medida.

(b) Supongamos primero que  $F$  está acotado. Fijemos  $\delta > 0$  y sea  $\mathcal{C}$  la colección de bolas

$$\{B_r(x) : x \in F, 0 < r \leq \delta \text{ y } \mu(B_r(x)) > cr^s\}.$$

Entonces por hipótesis,  $F \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$ . Por el teorema de recubrimiento C.1 existe una secuencia disjunta de bolas  $B_i \in \mathcal{C}$  tales que  $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i$  donde  $\tilde{B}_i$  es la bola concéntrica a la bola  $B_i$  pero con el radio 5 veces mayor. Luego  $\{\tilde{B}_i\}$  es un  $10\delta$ -recubrimiento de  $F$ , por tanto

$$\mathcal{H}_s^{10\delta}(F) \leq \sum_i |\tilde{B}_i|^s \leq 5^s \sum_i |B_i|^s \leq 10^s c^{-1} \sum_i \mu(B_i) \leq 10^s c^{-1} \mu(\mathbb{R}^n).$$

Haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos  $\mathcal{H}_s(F) \leq 10^s c^{-1} \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . Finalmente, si  $F$  no es acotado y se tiene  $\mathcal{H}_s(F) > 10^s c^{-1} \mu(\mathbb{R}^n)$ , entonces se tendría que la  $\mathcal{H}_s$ -medida para algún subconjunto acotado de  $F$  también excederá este valor contradiciendo lo probado justo antes.

□

### 2.5.2. Subconjuntos de medida finita

El siguiente enunciado garantiza que cualquier conjunto  $F$  de Borel con  $\mathcal{H}_s(F) = \infty$  contiene un subconjunto  $E$  con  $0 < \mathcal{H}_s(E) < \infty$ . Esto puede parecer evidente a primera vista, sin embargo no lo es, ya que es posible saltar de una medida infinita a una medida 0 sin pasar antes por ningún valor intermedio.

**Teorema 2.14.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Borel con  $\mathcal{H}_s(F) = \infty$ . Entonces existe un conjunto compacto  $E \subset F$  tal que  $0 < \mathcal{H}_s(E) < \infty$ .*

*Demostración.* La prueba es larga pues requiere introducir una nueva medida, la medida de red (en un espacio Euclídeo). Para la demostración completa ver [6, p. 64-70].

□

Un gran número de resultados solo se pueden aplicar a  $s$ -conjuntos, i.e., conjuntos con  $0 < \mathcal{H}_s(F) < \infty$  (hablaremos de ellos en el capítulo 3). Una forma de tratar con conjuntos con  $\mathcal{H}_s(F) = \infty$  es usar el teorema 2.14 para extraer un subconjunto de medida finita positiva, estudiar las propiedades de este último e interpretar estas propiedades en el contexto del conjunto más grande  $F$ .

La siguiente proposición realmente es un corolario de la proposición 2.14

**Teorema 2.15.** *Sea  $F$  un conjunto de Borel que satisface  $0 < \mathcal{H}_s(F) < \infty$ . Entonces existe una constante  $b$  y un conjunto compacto  $E \subset F$  con  $\mathcal{H}_s(E) > 0$  tal que:*

$$(2.11) \quad \mathcal{H}_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s,$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ .

*Demostración.* En la proposición 2.13 (b) tomemos  $\mu$  como la restricción de  $\mathcal{H}_s$  a  $F$ , i.e.,  $\mu(A) = \mathcal{H}_s(F \cap A)$ . Entonces, si

$$F_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))/r^s > 10^{1+s}\},$$

se sigue que  $\mathcal{H}_s(F_1) \leq 10^s 10^{-(1+s)} \mathcal{H}_s(F) \leq \frac{1}{10} \mathcal{H}_s(F)$ . Por tanto  $\mathcal{H}_s(F \setminus F_1) \geq \frac{9}{10} \mathcal{H}_s(F) > 0$ . Tomando  $E_1 = F \setminus F_1$  entonces  $\mathcal{H}_s(E_1) > 0$  y  $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))/r^s \leq 10^{1+s}$  para  $x \in E_1$ . Por el teorema de Egoroff (ver [7, p. 62]) se sigue que existe un conjunto compacto  $E \subset E_1$  con  $\mathcal{H}_s(E) > 0$  y un número  $r_0 > 0$  tal que  $\mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))/r^s \leq 10^{2+s} \forall x \in E$  y para todo  $0 < r \leq r_0$ . Pero  $\mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))/r^s \leq \mathcal{H}_s(F)/r_0^s$  si  $r \geq r_0$  luego se sigue 2.11.  $\square$

**Corolario 2.16.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Borel con  $\mathcal{H}_s(F) = \infty$ . Entonces existe un conjunto compacto  $E \subset F$  tal que  $0 < \mathcal{H}_s(E) < \infty$  y tal que para alguna constante  $b$ :*

$$\mathcal{H}_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $r \geq 0$ .

*Demostración.* Por el teorema 2.14 tenemos un subconjunto de  $F$  de medida finita positiva, aplicando 2.15 obtenemos el resultado.  $\square$



## CAPÍTULO 3

# Teoría Geométrica de la Medida

---

El análisis clásico conlleva buscar aproximaciones locales de curvas y superficies mediante el uso de líneas tangentes o planos tangentes. Visto localmente una curva suave puede ser tratada como una recta. Pero, ¿qué podemos decir de la estructura local de objetos tan complicados como los fractales?

Utilizando la medida de Hausdorff podemos estudiar las propiedades de locales de un conjunto fractal. Sin embargo para utilizar todo el potencial de la medida de Hausdorff, es necesario restringir nuestra atención a los  $s$ -conjuntos.

**Definición 3.1** ( $s$ -conjunto). Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  conjunto de Borel. Entonces  $F$  es un  $s$ -conjunto ( $0 \leq s \leq n$ ) si  $0 < \mathcal{H}_s(F) < \infty$ .

Esto no es una restricción tan fuerte como podría parecer. Muchos fractales son en efecto  $s$ -conjuntos e incluso aquellos que  $\mathcal{H}_s(E) = \infty$  poseen subconjuntos que son  $s$ -conjuntos para los cuales la teoría puede ser aplicada (ver teorema 2.14). Alternativamente, ocurre a menudo que dado un conjunto  $F$  de dimensión  $s$ , este es unión numerable de  $s$ -conjuntos y las propiedades de estos conjuntos pueden ser transferidas a  $F$ .

En este capítulo estudiaremos las propiedades locales de los  $s$ -conjuntos. Para ello primero introduciremos la noción de densidad de un punto y posteriormente definiremos la densidad de un conjunto. A continuación distinguiremos dos tipos de  $s$ -conjuntos, aquellos cuya densidad es 1 en casi todo punto, llamados regulares y aquellos que no cumplen esto, llamados irregulares. Probaremos al final de la sección 3.1 que todo  $s$ -conjunto se puede descomponer en un conjunto regular y en un conjunto irregular. En la sección 3.2 haremos un estudio más fino para los 1-conjuntos. Probaremos que todo 1-conjunto regular está contenido en la unión de rectas rectificables. Finalmente en la sección 3.3 analizaremos la dimensión Hausdorff de la proyección de conjuntos del plano. Los resultados obtenidos en esta última sección se usarán en su totalidad en la construcción de un conjunto de Besicovitch en el capítulo 4.

### 3.1. Propiedades Básicas de Densidad

Un resultado clásico en la teoría de la medida de Lebesgue es el teorema de densidad.

**Teorema 3.2** (Teorema de la densidad de Lebesgue). *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto  $\mathcal{L}_n$ -medible. Entonces la densidad de Lebesgue de  $F$  en  $x$  se define como:*

$$(3.1) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}_n(F \cap B_r(x))}{\mathcal{L}_n(B_r(x))}.$$

*El límite existe y es 1 si  $x \in F$  y 0 si  $x \notin F$  en casi todo punto (en el sentido de la medida  $\mathcal{L}_n$ ).*

Este resultado para la medida de Lebesgue motiva los conceptos que introduciremos en esta sección. Primero introduciremos las nociones de densidad en un punto y densidad de un conjunto y luego probaremos un serie de resultados que se derivan de estas nuevas definiciones. Se podrá observar entonces una similitud entre los resultados obtenidos y el teorema de la densidad de Lebesgue.

**Definición 3.3** (Densidad). Se define la densidad inferior y superior respectivamente, de un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  de un  $s$ -conjunto  $F$  como:

$$(3.2) \quad \underline{D}_s(F, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s},$$

$$(3.3) \quad \overline{D}_s(F, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s}.$$

Si  $\overline{D}_s(F, x) = \underline{D}_s(F, x)$  decimos que la densidad de  $F$  en  $x$  existe y la denotamos por  $D_s(F, x)$ .

**Definición 3.4.** Se dice que un punto  $x \in F$  es regular si  $\overline{D}_s(F, x) = \underline{D}_s(F, x) = 1$ . En caso contrario se dice que  $x$  es irregular.

**Definición 3.5.** Un  $s$ -conjunto es llamado regular/irregular si en casi todo punto (en el sentido de la medida  $\mathcal{H}_s$ ) es regular/irregular.

**Teorema 3.6.** *Sea  $F$  un  $s$ -conjunto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces:*

$$(a) \quad \overline{D}_s(F, x) = \underline{D}_s(F, x) = 0 \text{ para casi todo } x \notin F.$$

$$(b) \quad 2^{-s} \leq \overline{D}_s(F, x) \leq 1 \text{ para casi todo } x \in F.$$

*Demostración.* (a) Si  $F$  es cerrado y  $x \notin F$ , entonces  $B_r(x) \cap F = \emptyset$  si  $r$  suficientemente pequeño. Por tanto  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s} = 0$ . La prueba del caso en el que  $F$  es abierto es más complicada y requiere introducir el concepto de densidad convexa. Para la demostración completa ver [6] capítulo II página 25.

(b) Se sigue rápidamente de la proposición 2.13 (a) tomando  $\mu$  como restricción de  $\mathcal{H}_s$  a  $F$ , es decir  $\mu(A) = \mathcal{H}_s(F \cap A)$ . Si:

$$F_1 = \{x \in F : \overline{D}_s(F, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s} < 2^{-s} c\}.$$

Entonces  $\mathcal{H}_s(F_1) \geq \mathcal{H}_s(F)/c$ . El caso  $c < 1$  solo se puede dar si  $\mathcal{H}_s(F_1) = 0$ . Luego para casi todo punto  $x \in F$  tenemos  $\overline{D}_s(F, x) \geq 2^{-s}$ . Se obtiene la cota superior de la misma manera usando 2.13 (b).

□

**Teorema 3.7.** *Sea  $E \subset F$  subconjunto de Borel del  $s$ -conjunto  $F$ . Entonces:*

$$(3.4) \quad \overline{D}_s(E, x) = \overline{D}_s(F, x) \quad \underline{D}_s(E, x) = \underline{D}_s(F, x), \quad \forall x \in E.$$

*Demostración.* Escribiendo  $H = F \setminus E$  entonces tenemos por el teorema anterior que  $D_s(H, x) = 0$  en casi todo punto  $x \in F$ . Para tal  $x$ :

$$\begin{aligned} \underline{D}_s(F, x) &= \underline{D}_s(E, x) + D_s(H, x) = \underline{D}_s(E, x), \\ \overline{D}_s(F, x) &= \overline{D}_s(E, x) + D_s(H, x) = \overline{D}_s(E, x). \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.8.** *Sea  $F$  un  $s$ -conjunto regular/irregular. Entonces cualquier subconjunto medible  $E$  con  $\mathcal{H}_s(E) > 0$  es regular/irregular.*

**Corolario 3.9.** *La intersección de un conjunto regular/irregular con un conjunto medible es un conjunto regular/irregular. La intersección de un conjunto regular con un conjunto irregular es un conjunto de medida 0.*

El siguiente corolario nos permite tratar las partes regulares e irregulares de un conjunto de forma independiente.

**Corolario 3.10** (Teorema de descomposición). *Sea  $F$  un  $s$ -conjunto, el conjunto de puntos regulares de  $F$  es un conjunto regular. El conjunto de puntos irregulares de  $F$  es un conjunto irregular.*

## 3.2. Estructura de los 1-conjuntos

Hay una conexión directa entre los 1-conjuntos y las curvas rectificables. En esta sección estudiaremos en detalle la estructura de los 1-conjuntos y probaremos que 1-conjunto regular es salvo un conjunto de medida cero, una colección numerable de curvas rectificables.

**Lema 3.11.** *Si  $C$  es una curva rectificable entonces  $\mathcal{H}_1(C) = \mathcal{L}(C)$ .*

*Demostración.* Sea  $x, y \in C$ , sea  $C_{x,y}$  la parte de  $C$  entre  $x$  e  $y$ . La proyección ortogonal sobre la recta que une  $x$  con  $y$  no aumenta las distancias. Obtenemos por tanto  $\mathcal{H}_1(C_{x,y}) \geq \mathcal{H}_1([x, y]) = \mathcal{L}_1([x, y]) = |x - y|$ , donde  $[x, y]$  denota la línea recta que une  $x$  con  $y$ . Por tanto cualquier partición  $x_0, x_1, \dots, x_m$  de  $C$ ,

$$\sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^m \mathcal{H}_1(C_{x_i, x_{i-1}}) \leq \mathcal{H}_1(C).$$

Por tanto  $\mathcal{L}(C) \leq \mathcal{H}_1(C)$ .

Por otro lado, sea  $f : [0, \mathcal{L}(C)] \rightarrow C$  la función que asocia a cada valor  $t$  del intervalo  $[0, \mathcal{L}(C)]$  el único punto de  $C$  a distancia  $t$  de uno de sus extremos prefijados. Está claro que  $|f(t) - f(u)| \leq |t - u|$  para  $0 \leq t, u \leq \mathcal{L}(C)$ , por tanto  $\mathcal{H}_1(C) \leq \mathcal{L}(C)$  por 2.10 (a).  $\square$

**Lema 3.12.** *Una curva rectificable es un 1-conjunto regular.*

*Demostración.* Si  $C$  es rectificable, entonces  $\mathcal{L}(C) < \infty$  y como  $C$  tiene distintos extremos  $p$  y  $q$ , obtenemos  $\mathcal{L}(C) \geq |p - q| > 0$ . Por el lema 3.11,  $0 < \mathcal{H}_1(C) < \infty$ , por tanto  $C$  es un 1-conjunto. Si el punto  $x$  de  $C$  no es un extremo, entonces se divide  $C$  en dos partes  $C_{p,x}$  y  $C_{x,q}$ . Si tomamos  $r$  suficientemente pequeño, entonces moviéndonos a lo largo de la curva  $C_{x,q}$  alcanzamos un primer punto  $y$  de  $C$  tal que  $|x - y| = r$ . Entonces  $C_{x,y} \subset B_r(x)$  y

$$r = |x - y| \leq \mathcal{L}(C_{x,y}) = \mathcal{H}_1(C_{x,y}) \leq \mathcal{H}_1(C_{x,q} \cap B_r(x)).$$

Análogamente se tiene,  $r \leq \mathcal{H}_1(C_{p,x} \cap B_r(x))$ , luego sumando obtenemos  $2r \leq \mathcal{H}_1(C \cap B_r(x))$ , si  $r$  es suficientemente pequeño. Por tanto,

$$\underline{D}_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_1(C \cap B_r(x))}{2r} \geq 1.$$

Por la proposición 3.6 (b)  $\underline{D}_1(C, x) \leq \overline{D}_1(C, x) \leq 1$ . Por tanto  $\underline{D}_1(C, x)$  existe y es igual a 1 para todo  $x \in C$  salvo quizás los dos puntos extremos. Por tanto  $C$  es regular.  $\square$

**Definición 3.13** (*Y-Conjunto*). Se dice que  $F$  es un  $Y$ -conjunto si es 1-conjunto contenido en la unión numerable de curvas rectificables.

**Teorema 3.14.** *Todo Y-conjunto es un 1-conjunto regular.*

*Demostración.* Sea  $F$  un  $Y$ -conjunto entonces  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$  donde  $C_i$  son curvas rectificables. Para cada  $i$  y en casi todo punto  $x \in F \cap C_i$  tenemos usando el lema 3.12

$$1 = \underline{D}_1(C_i, x) = \underline{D}_1(F \cap C_i, x) \leq \underline{D}_1(F, x),$$

y, por tanto,  $1 \leq \underline{D}_1(F, x)$  para casi todo  $x \in F$ . Pero también para casi todo  $x \in F$  tenemos  $\underline{D}_1(F, x) \leq \overline{D}_1(F, x) \leq 1$ , por tanto  $\underline{D}_1(F, x) = 1$  en casi todo punto y  $F$  es regular.  $\square$

**Definición 3.15** (*Z-Conjunto*). Definimos un  $Z$ -conjunto como un 1-conjunto cuya intersección con cada curva rectificable tiene  $\mathcal{H}_1$ -medida 0.

**Teorema 3.16.** *Todo 1-conjunto irregular es un Z-conjunto.*

*Demostración.* Si  $F$  es irregular y  $C$  es una curva rectificable entonces  $F \cap C$  es un subconjunto de un conjunto irregular y de un conjunto regular, luego tiene  $\mathcal{H}_1$ -medida cero.  $\square$

**Teorema 3.17.** *Sea  $F$  un  $Z$ -conjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $\underline{D}_1(F, x) \leq 3/4, \quad \forall x \in E$ .*

*Demostración.* La prueba es elaborada y requiere introducir la noción de densidad convexa. Para su demostración ver [6, p. 44].  $\square$

Con la proposición anterior podemos terminar de caracterizar los conjuntos regulares e irregulares.

**Teorema 3.18.** (a) *Un 1-conjunto en  $\mathbb{R}^n$  es irregular si y solo si es un  $Z$ -conjunto.*

(b) *Un 1-conjunto en  $\mathbb{R}^n$  es regular si y solo si es unión de un  $Y$ -conjunto y de un conjunto  $\mathcal{H}_1$ -medida 0.*

*Demostración.* (a) Un  $Z$ -conjunto debe ser irregular por la proposición 3.17. El teorema 3.16 da la implicación inversa.

(b) Por la proposición 3.14 un  $Y$ -conjunto es regular, y añadirle un conjunto de medida cero no cambia su densidad, por tanto tampoco a la regularidad. Si  $F$  es regular, entonces cualquier subconjunto de Borel  $E$  de medida positiva es regular con  $\underline{D}_1(E, x) = 1$  para casi todo  $x \in E$ . Por la proposición 3.17  $E$  no puede ser un  $Z$ -conjunto, luego existe alguna curva rectificable que interseca  $E$  en un conjunto de medida positiva. Usamos este hecho para definir inductivamente una secuencia de curvas rectificables  $\{C_i\}$ . Elegimos  $C_1$  para cubrir una parte razonablemente grande de  $F$ :

$$(3.5) \quad \mathcal{H}_1(F \cap C_1) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}_1(F \cap C) : C \text{ rectificable}\} > 0.$$

Sean  $C_1, \dots, C_k$  las curvas elegidas y  $F_k = F \setminus \bigcup_{i=1}^k C_i$  tiene medida positiva, y sea  $C_{k+1}$  una curva rectificable para la cual:

$$\mathcal{H}_1(F_k \cap C_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}_1(F_k \cap C) : C \text{ rectificable}\} > 0.$$

Si el proceso termina para algún  $k$ , las curvas  $C_1, \dots, C_k$  cubren casi todo  $F$  y  $F$  es un  $Y$ -conjunto. En caso contrario,

$$\infty > \mathcal{H}_1(F) \geq \sum_k \mathcal{H}_1(F_k \cap C_{k+1}),$$

pues los  $F_k \cap C_{k+1}$  son disjuntos, por tanto  $\mathcal{H}_1(F_k \cap C_{k+1}) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Si  $\mathcal{H}_1(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) > 0$  hay una curva rectificable  $C$  tal que  $\mathcal{H}_1((F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \cap C) = d$  para algún  $d > 0$ . Pero  $\mathcal{H}_1(F_k \cap C_{k+1}) < \frac{1}{2}d$  para algún  $k$ , por tanto, de acuerdo con la ecuación 3.5,  $C$  hubiese sido la elección en vez de  $C_{k+1}$ . Por tanto  $\mathcal{H}_1(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = 0$ , y  $F$  consiste en un  $Y$ -conjunto  $F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$  junto con  $F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$  que tiene medida cero.  $\square$

### 3.3. Proyección de Fractales

En esta sección examinaremos el comportamiento de la dimensión de Hausdorff con respecto a la proyección. En particular, estudiaremos la proyección ortogonal de fractales del plano sobre las rectas que pasan por el origen (subespacios de dimensión 1).

#### 3.3.1. Proyección de conjuntos arbitrarios del plano

La teoría potencial se desarrolló inicialmente para tratar los problemas electrostáticos pero resulta que la dimensión de Hausdorff y la teoría potencial (en particular la noción de capacidad) están estrechamente relacionadas. En la siguiente prueba usamos resultados de la teoría potencial para caracterizar la dimensión de Hausdorff. Sin embargo consideramos que abordar en esta memoria esta teoría no se adecuaba a los objetivos, así que hemos incluido en el apéndice D los resultados que usamos y así como su demostración.

**Notación.** • Denotamos por  $L_\theta$  la recta de  $\mathbb{R}^2$  que pasa por el origen y forma un ángulo de  $\theta$  respecto al eje horizontal.

• Denotamos la proyección ortogonal en  $L_\theta$  por  $\text{proj}_\theta$ .

**Teorema 3.19.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto de Borel.

- (a) Si  $\dim_H F \leq 1$  entonces  $\dim_H(\text{proj}_\theta F) = \dim_H F$  para casi todo  $\theta \in [0, \pi)$ .  
 (b) Si  $\dim_H F > 1$  entonces  $\text{proj}_\theta F$  tiene longitud positiva (como subconjunto de  $L_\theta$ ) y por lo tanto tiene dimensión 1 para casi todo  $\theta \in [0, \pi)$ .

*Demostración.* (a) Si  $s < \dim_H F \leq 1$  entonces por el teorema D.2 (b) existe una distribución de masa  $\mu$  en  $F$  con  $0 < \mu(F) < \infty$  y:

$$(3.6) \quad \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\|x-y\|^s} < \infty.$$

Para cada  $\theta$ , proyectamos la distribución de masa  $\mu$  sobre la línea  $L_\theta$  para obtener una distribución de masa  $\mu_\theta$  en  $\text{proj}_\theta F$ . Luego  $\mu_\theta$  está definido como:

$$\mu_\theta([a, b]) = \mu\{x : a \leq x \cdot \theta \leq b\},$$

para cada intervalo  $[a, b]$ , o equivalentemente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\mu_\theta(t) = \int_F f(x \cdot \theta)d\mu(x),$$

para cada función  $f$  no negativa. Entonces,

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_\theta(u)d\mu_\theta(v)}{\|u-v\|^s} \right] d\theta &= \int_0^\pi \left[ \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\|x \cdot \theta - y \cdot \theta\|^s} \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\|(x-y) \cdot \theta\|^s} \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\|\tau \cdot \theta\|^s} \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\|(x-y)\|^s}, \end{aligned}$$

para cualquier vector unitario fijo  $\tau$ . Si  $s < 1$  entonces 3.7 es finito en virtud de 3.6 y por tanto

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{|\tau \cdot \theta|^s} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\cos(\tau - \theta)|^s} < \infty.$$

Luego

$$\int_F \int_F \frac{d\mu_\theta(u)d\mu_\theta(v)}{\|u - v\|^s} < \infty,$$

para casi todo  $\theta \in [0, \pi)$ . Por el teorema D.2 (a) la existencia de la distribución de masa  $\mu_\theta$  en  $proj_\theta F$  implica que  $\dim_H(proj_\theta F) > s$ . Esto es cierto para todo  $s < \dim_H F$ , luego se sigue la parte (a) del teorema.

- (b) Al igual que en la parte (a), para la demostración se define como antes la distribución de masa  $\mu_\theta$  en  $proj_\theta F$ , pero ahora examinamos la transformada de Fourier  $\hat{\mu}_\theta$  de la medida  $\mu_\theta$ . La demostración y se puede encontrar en [6, p. 81].

□

Este teorema de la proyección se puede generalizar para dimensiones mayores de manera natural.

### 3.3.2. Proyección de 1-conjuntos en el plano

Si  $F \subset \mathbb{R}^2$  tiene dimensión Hausdorff 1, entonces por el teorema 3.19, la proyección de  $F$  sobre casi cualquier dirección  $L_\theta$  tiene dimensión 1. Sin embargo en este caso crítico, no sabemos si la proyección tiene medida positiva o vale cero. En este caso particular donde  $F$  es un 1-conjunto se puede hacer un estudio más fino.

**Teorema 3.20.** *Sea  $F$  un 1-conjunto regular en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $proj_\theta F$  tiene longitud positiva exceptuando quizás para un  $\theta \in [0, \pi)$ .*

*Demostración.* La prueba es larga y tediosa. Damos una idea de la demostración.

Por el teorema 3.18 (b) es suficiente con probarlo para  $F \subset C$  con longitud positiva, donde  $C$  es una curva rectificable. Usando el teorema de densidad de Lebesgue aproximamos  $F$  por subcurvas continuas en  $C$ . Esencialmente el único caso que hay que considerar es cuando  $F$  es a su vez una curva rectificable  $C_1$  uniendo dos puntos distintos  $x$  e  $y$ . Pero entonces, la proyección sobre  $L_\theta$  de tal curva es un intervalo de medida positiva, exceptuando quizás para un valor de  $\theta$  para el cuál  $L_\theta$  es perpendicular a la línea recta que pasa por  $x$  e  $y$ . □

**Teorema 3.21.** *Sea  $F$  un 1-conjunto irregular en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $proj_\theta F$  tiene longitud cero para casi todo  $\theta \in [0, \pi)$ .*

*Demostración.* Esta prueba es complicada y larga. Depende de los conceptos de densidad y de la estructura de la densidad angular de los conjuntos irregulares. □

**Corolario 3.22.** *Sea  $F$  un 1-conjunto en  $\mathbb{R}^2$ . Si la parte regular de  $F$  tiene  $\mathcal{H}_1$ -medida cero, entonces  $proj_\theta F$  tiene longitud cero para casi todo  $\theta$ . En caso contrario tiene medida positiva excepto quizás para un valor de  $\theta$ .*

**Corolario 3.23.** *Un 1-conjunto en  $\mathbb{R}^2$  es irregular si y solo si tiene una proyección de longitud cero en al menos dos direcciones.*

A continuación demostramos un teorema que se usará para demostrar que todo conjunto de Besicovitch (ver 4.2) tiene dimensión Hausdorff 2.

**Notación.** • Denotamos por  $L_x$  la recta de  $\mathbb{R}^2$  paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto  $(x, 0)$ .

**Lema 3.24.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^2$  conjunto de Borel. Si  $1 \leq s \leq 2$  entonces:*

$$(3.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{s-1}(F \cap L_x) dx \leq \mathcal{H}_s(F).$$

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ , sea  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  tal que:

$$\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_s^\delta(F) + \epsilon.$$

Entonces cada  $U_i$  está contenido en un cubo  $S_i$  de lado  $|U_i|$  con sus lados paralelos a los ejes coordenados. Consideremos  $\chi_i$  la función indicatriz de  $S_i$  (i.e.,  $\chi_i(x, y) = 1$  si  $(x, y) \in S_i$  y  $\chi_i(x, y) = 0$  si  $(x, y) \notin S_i$ ). Para cada  $x$ , los conjuntos  $\{S_i \cap L_x\}$  son un  $\delta$ -recubrimiento de  $F \cap L_x$ , luego:

$$\mathcal{H}_{s-1}^\delta(F \cap L_x) \leq \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-1} = \sum_i |U_i|^{s-2} |S_i \cap L_x| = \sum_i |U_i|^{s-2} \int \chi_i(x, y) dy.$$

Por tanto,

$$\int \mathcal{H}_{s-1}^\delta(F \cap L_x) \leq \sum_i |U_i|^{s-2} \int \int \chi_i(x, y) dx dy = \sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_s^\delta + \epsilon.$$

Como  $\epsilon > 0$  es arbitrario,  $\int \mathcal{H}_{s-1}^\delta(F \cap L_x) \leq \mathcal{H}_s^\delta(F)$ . Si  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos 3.8.  $\square$

**Teorema 3.25.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^2$ . Entonces para casi todo  $x$  (en el sentido de la medida 1 dimensional de Lebesgue),  $\dim_H(F \cap L_x) \leq \max\{0, \dim_H F - 1\}$ .*

*Demostración.* Tomemos  $s > \dim_H F$ , entonces  $\mathcal{H}_s(F) = 0$ . Si  $s > 1$ , 3.8 nos da  $\mathcal{H}_{s-1}(F \cap L_x) = 0$  y por tanto  $\dim_H(F \cap L_x) \leq s - 1$  para casi todo  $x$ .  $\square$



## CAPÍTULO 4

# Aplicaciones

---

En este capítulo estudiaremos algunos ejemplos de conjuntos de dimensión fraccionaria que resultan de construcciones particulares u ocurren en otras ramas de las matemáticas.

Primero trabajaremos con conjuntos ‘auto-similares’, es decir, conjuntos contruidos de piezas geoméricamente similares a todo el conjunto, pero en una escala más pequeña.

Luego estudiaremos el problema de construir un conjunto del plano que contenga un segmento unidad en cada dirección y área 0. Tales conjuntos se llaman conjuntos de Besicovitch y existen numerosas construcciones alternativas.

Finalmente, estudiaremos los conjuntos de Julia que surgen al iterar funciones complejas. Deduciremos muchas propiedades que hacen que los conjuntos de Julia sean en su totalidad conjuntos muy interesantes. Al final de esta sección definiremos y trabajaremos con el conjunto de Mandelbrot.

### 4.1. Conjuntos definidos por auto-similitudes

Muchos fractales están constituidos por partes que son en cierto modo similares al conjunto total. Por ejemplo el conjunto de Cantor es la unión de dos copias similares a el mismo y la curva de Koch es unión de cuatro copias. En esta sección definiremos la noción de auto-similitud y probaremos un teorema que determina la dimensión de Hausdorff de estos conjuntos.

#### 4.1.1. Esquema de funciones iteradas

A continuación definimos la noción de contracción y similitud.

**Definición 4.1.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  conjunto cerrado. Una aplicación  $S : D \rightarrow D$  es una contracción de  $D$  si existe  $c$  con  $0 < c < 1$  tal que  $\|S(x) - S(y)\| \leq c\|x - y\|$ . Si se da la igualdad, es decir, si  $\|S(x) - S(y)\| = c\|x - y\|$ , entonces decimos que  $S$  es una similitud.

Está claro que  $S$  es una aplicación continua y en el caso de ser una similitud  $S$  no hace más que transformar conjuntos en otros geoméricamente idénticos.

Ahora damos la definición de conjunto invariante bajo contracciones.

**Definición 4.2.** Sean  $S_1, \dots, S_m$  contracciones. Entonces  $F \subset D$  es invariante bajo las transformaciones  $S_i$  si

$$(4.1) \quad F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Como veremos tales conjuntos invariantes son por lo general fractales. A continuación veremos como una familia de contracciones o también llamada “esquema de funciones iteradas” define un único conjunto no vacío, compacto e invariante.

Primero definimos una métrica o distancia entre subconjuntos de  $D$ . Denotemos por  $\mathcal{S}$  la clase de todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $D$ .

**Definición 4.3.** Llamamos  $\delta$ -cuerpo paralelo de  $A \in \mathcal{S}$  al conjunto de puntos a distancia menor o igual que  $\delta$  de  $A$  es decir,  $A_\delta = \{x \in D : |x-a| \leq \delta, \text{ para algún } a \in A\}$ .

Ahora dotamos a  $\mathcal{S}$  de una distancia convirtiendo  $\mathcal{S}$  en un espacio métrico.

**Definición 4.4.** Definimos la distancia  $d(\cdot, \cdot)$  entre dos conjuntos de  $\mathcal{S}$  como la aplicación  $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+ : (A, B) \mapsto d(A, B) = \inf \{\delta : A \subset B_\delta \text{ y } B \subset A_\delta\}$ .

Es decir que la distancia definida en  $\mathcal{S}$  entre un conjunto  $A$  y un conjunto  $B$  corresponde con el  $\delta$  más pequeño tal que el  $\delta$ -cuerpo paralelo de  $A$  contiene a  $B$  y viceversa. No es difícil ver que se trata de una distancia. A continuación usamos este resultado para estudiar conjuntos invariantes por contracciones.

**Teorema 4.5.** Sea  $S_1, \dots, S_m$  contracciones de  $D \subset \mathbb{R}^n$ , es decir

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| \leq c_i \|x - y\|, \quad (x, y \in D),$$

con  $c_i < 1$  para cada  $i$ . Entonces existe un único conjunto no vacío  $F$  que es invariante para los  $S_i$ , es decir:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Además, si definimos una transformación  $S$  en la clase  $\mathcal{S}$  de conjuntos compactos no vacíos por:

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E),$$

y escribimos  $S^k$  para denotar la iteración  $k$ -ésima de  $S$  dada por  $S^0(E) = E, S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$  para  $k \geq 1$ , entonces

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E),$$

para cualquier conjunto  $E$  en  $\mathcal{S}$  tal que  $S_i(E) \subset E$  para cada  $i$ .

*Demostración.* Vemos que los conjuntos en  $\mathcal{S}$  son transformados por  $S$  en otros conjuntos en  $\mathcal{S}$ . Sea  $E$  cualquier conjunto en  $\mathcal{S}$  tal que  $S_i(E) \subset E$  para todo  $i$ ; por ejemplo  $D \cap B_r(0)$  con  $r$  suficientemente grande bastaría. Entonces  $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$ , luego  $S^k(E)$  es una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos que necesariamente tienen una intersección compacta no vacía  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ . Como  $S^k(E)$  es una sucesión decreciente, se sigue que  $S(F) = F$ , por tanto  $F$  es invariante. Para ver que el conjunto invariante es único, vemos que si  $A, B \in \mathcal{S}$  entonces:

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B)).$$

Luego,

$$(4.2) \quad d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\right) d(A, B).$$

Se sigue que si  $S(A) = A$  y  $S(B) = B$  son ambos conjuntos invariantes, entonces  $d(A, B) = 0$ , lo que implica que  $A = B$ .  $\square$

#### 4.1.2. Dimensión de conjuntos auto-similares

Una ventaja de usar un esquema de funciones iteradas es que la dimensión del conjunto invariante es relativamente sencilla de calcular. En esta sección discutimos el caso cuando  $S_1, \dots, S_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son similitudes es decir,

$$(4.3) \quad \|S_i(x) - S_i(y)\| = c_i \|x - y\|, \quad (x, y \in \mathbb{R}^n),$$

donde  $0 < c_i < 1$ . A continuación mostramos que bajo ciertas condiciones, un conjunto autosimilar  $F$  tiene dimensión de Hausdorff igual al valor de  $s$  tal que se satisface:

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^m c_i^s = 1,$$

y además  $F$  tiene medida  $\mathcal{H}_s$  finita y positiva. Intuitivamente, si  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$  con la unión “casi disjunta”, tenemos que

$$(4.5) \quad \mathcal{H}_s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}_s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}_s(F),$$

usando 4.3 y la propiedad 2.6 de la medida de Hausdorff. Suponiendo que  $0 < \mathcal{H}_s(F) < \infty$  para  $s = \dim_H F$ , obtenemos que  $s$  satisface 4.4.

Para que el argumento anterior sea válido se requiere la siguiente condición que asegura que las componentes  $S_i(F)$  de  $F$  “no se superponen demasiado”.

**Definición 4.6.** Se dice que  $S_i$  satisface la condición de conjunto abierto si existe un conjunto abierto acotado no vacío  $V$  tal que:

$$(4.6) \quad \bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V,$$

con la unión disjunta.

A continuación probamos que dados  $S_i$  que satisfacen la condición de conjunto abierto, la dimensión de Hausdorff del conjunto invariante está dada por 4.4. Para ello necesitamos el siguiente resultado geométrico.

**Lema 4.7.** *Sea  $\{V_i\}$  colección de subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tal que cada  $V_i$  contiene una bola de radio  $a_1 r$  y está contenida en una bola de radio  $a_2 r$ . Entonces cualquier bola  $B$  de radio  $r$  interseca como mucho  $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$  del cierre  $\bar{V}_i$ .*

*Demostración.* Si  $\bar{V}_i$  interseca con  $B$ , entonces  $\bar{V}_i$  está contenido en la bola concéntrica de radio  $(1 + 2a_2)r$ . Supongamos que  $q$  de los conjuntos  $\bar{V}_i$  intersecan  $B$ . Entonces, sumando los volúmenes de las correspondientes bolas interiores de radio  $a_1 r$ , se sigue que  $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$ , obteniendo así la cota superior para  $q$ .  $\square$

Enunciamos a continuación el teorema fundamental de esta sección. Este nos permitirá calcular de forma directa la dimensión de conjuntos auto-similares.

**Teorema 4.8.** *Supongamos que la condición de conjunto abierto se verifica para las similitudes  $S_i$  de  $\mathbb{R}^n$  con radios  $c_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Si  $F$  es un conjunto invariante para ellas, es decir:*

$$(4.7) \quad F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F),$$

entonces  $\dim_H F = s$ , donde  $s$  es dado por

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Además, para este valor de  $s$ ,  $0 < \mathcal{H}_s(F) < \infty$ .

*Demostración.* Sea  $s$  tal que se satisface 4.8. Para cualquier conjunto  $A$  escribimos  $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$ . Denotamos por  $J_k$  el conjunto de todas las secuencias de  $k$ -términos  $(i_1, \dots, i_k)$  con  $1 \leq i_j \leq m$ . Se sigue usando 4.7 repetidamente que

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Comprobamos ahora que estos recubrimientos de  $F$  proporcionan una cota superior de la medida de Hausdorff de  $F$ . Como la aplicación  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$  es una similitud de radio  $c_{i_1} \cdots c_{i_k}$  entonces,

$$(4.9) \quad \sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s |F|^s = \left( \sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \cdots \left( \sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s,$$

por 4.8. Para cada  $\delta > 0$ , podemos elegir  $k$  tal que  $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$ , luego  $\mathcal{H}_s^\delta(F) \leq |F|^s$  y por tanto  $\mathcal{H}_s(F) \leq |F|^s$ .

Obtenemos ahora la cota inferior para la dimensión. Sea  $I$  el conjunto de todas las secuencias infinitas,  $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ , y sea  $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) :$

$1 \leq q_j \leq m$ }, el “cilindro” formado por aquellos elementos en  $I$  con términos iniciales  $(i_1, \dots, i_k)$ . Consideramos ahora la distribución de masa  $\mu$  en  $I$  tal que  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$ . Como  $(c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s$ , i.e.,  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$ , se sigue que  $\mu$  es de hecho una distribución de masa sobre los subconjuntos de  $I$  con  $\mu(I) = 1$ . Consideramos ahora  $\tilde{\mu}$  la distribución de masa sobre  $F$  definida como  $\tilde{\mu} = \{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$  con  $A \subset F$ . Comprobamos fácilmente que  $\tilde{\mu}(F) = 1$ . Vemos que  $\tilde{\mu}$  verifica el Principio de distribución de masa 2.12. Sea  $V$  el conjunto abierto de 4.6. Entonces  $S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V}) \subset \bar{V}$ , tenemos  $F \subset \bar{V}$  y  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$  para cada secuencia finita  $(i_1, \dots, i_k)$ . Sea  $B$  cualquier bola de radio  $r < 1$ . Estimamos  $\tilde{\mu}(B)$  considerando los conjuntos  $V_{i_1, \dots, i_k}$  con diámetro comparable a  $B$  y con cierre intersecando  $F \cap B$ .

Acortamos cada secuencia infinita  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  después del primer término  $i_k$  para el cuál:

$$(4.10) \quad (\min_i c_i)r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r,$$

y denotamos por  $Q$  todas las secuencias finitas obtenidas de esta forma. Entonces para cada secuencia infinita  $(i_1, i_2, \dots) \in I$ , hay exactamente un valor de  $k$  con  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ . Como  $V_1, \dots, V_m$  son disjuntos, entonces lo son  $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$  para cada  $(i_1, \dots, i_k)$ . Por tanto la colección de conjuntos abierto  $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$  es disjunta. Análogamente  $F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ .

Elegimos  $a_1$  y  $a_2$  tal que  $V$  contiene una bola de radio  $a_1$  y está contenido en una bola de radio  $a_2$ . Luego, para  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ , el conjunto  $V_{i_1, \dots, i_k}$  contiene una bola de radio  $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1$  y por tanto una bola de radio  $(\min_i c_i) a_1 r$  y está contenido en una bola de radio  $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2$  y en consecuencia en una bola de radio  $a_2 r$ . Sea  $Q_1$  el conjunto de secuencias  $(i_1, \dots, i_k)$  en  $Q$  tales que  $B$  interseca  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ . Por el lema 4.7 hay como mucho  $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$  secuencias en  $Q_1$ . Entonces:

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) \leq \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \leq \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right\},$$

ya que si  $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ , entonces hay un entero  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$ . Se tiene que,

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q,$$

usando 4.10. Como cualquier conjunto  $U$  está contenido en una bola de radio  $|U|$ , tenemos que  $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$ , luego gracias al Principio de distribución de masa 2.12 obtenemos que  $\mathcal{H}_s(F) \geq q^{-1} > 0$  y  $\dim_H F = s$ .  $\square$

### 4.1.3. Cálculo de la dimensión Hausdorff de conjuntos notables

Usando el teorema 4.8 podemos calcular muy fácilmente la dimensión Hausdorff de conjuntos notables, entre ellos el de Cantor en  $\mathbb{R}$  y el del triángulo de Sierpinski y la Curva de Koch en  $\mathbb{R}^2$ .

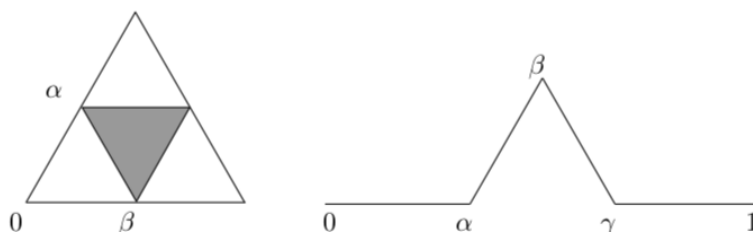


Figura 4.1: Similitudes del triángulo de Sierpinski y la curva de Koch

### Conjunto de Cantor

Cuando  $F = C$  es el conjunto de Cantor,  $F$  es invariante por las dos similitudes  $S_1(x) = x/3$  y  $S_2(x) = x/3 + 2/3$  de radio  $1/3$ . Estas dos similitudes verifican la condición de conjunto abierto para  $F$ , luego aplicando el teorema 4.8 concluimos que  $\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

### Triángulo de Sierpinski

El conocido triángulo de Sierpinski  $F = S$  se construye a partir de un triángulo equilátero mediante la eliminación repetida de los triángulos equiláteros invertidos. Este conjunto es invariante bajo las similitudes siguientes:  $S_1(x) = x/2$ ,  $S_2(x) = x/2 + \alpha$  y  $S_3(x) = x/2 + \beta$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los puntos dibujados en la figura 4.1. Estas similitudes también verifican la condición de conjunto abierto para  $F$  luego la dimensión Hausdorff del Triángulo de Sierpinski es  $\dim_H S = \frac{\log 3}{\log 2}$ .

### Curva de Koch

Análogamente para la curva de Koch, las similitudes que dejan invariante al conjunto son:  $S_1(x) = x/3$ ,  $S_2(x) = \rho x/3 + \alpha$ ,  $S_3(x) = \rho^{-1} x/3 + \beta$  y  $S_4(x) = x/3 + \gamma$ . Donde  $\rho$  es la rotación  $\pi/3$  respecto del origen y  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son los puntos mostrados en la figura 4.1. Luego la dimensión Hausdorff de esta curva  $K$  es  $\dim_H K = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

## 4.2. Dualidad y el problema de Kakeya

El método de la dualidad convierte conjuntos de puntos del plano en conjuntos de líneas y se puede usar para crear nuevo fractales a partir de otros. Esta técnica se puede usar para construir conjuntos con propiedades muy particulares. En particular, en esta sección construiremos un conjunto de Besicovitch usando este método. Probaremos al final que un conjunto de Besicovitch tiene siempre dimensión Hausdorff 2.

En seguida, introducimos un poco de notación para posteriormente explicar los principios básicos en los que se fundamenta el método de la dualidad.

**Notación.** Para cualquier punto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , denotamos por  $L(a, b)$  el conjunto de puntos en la recta  $y = a + bx$ .

Si  $F \subset \mathbb{R}^2$  definimos por  $L(F)$  la unión de las rectas correspondientes a los puntos de  $F$ , i.e.,  $L(F) = \bigcup \{L(a, b) : (a, b) \in F\}$ .

Denotamos por  $L_c$  la línea vertical  $x = c$ .

Tenemos entonces:

$$L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, (a, b) \cdot (1, c)).$$

Donde ‘ $\cdot$ ’ denota el producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ . Luego para un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^2$ :

$$L(F) \cap L_c = \{(c, (a, b) \cdot (1, c)) : (a, b) \in F\}.$$

Se puede interpretar geoméricamente el producto escalar por el vector  $(1, c)$  como la proyección sobre la línea en la dirección  $(1, c)$  y expandir después por un factor  $\sqrt{1 + c^2}$ . Luego el conjunto  $L(F) \cap L_c$  es geoméricamente similar a  $proj_\theta F$  con  $c = \tan \theta$ . En particular,

$$(4.11) \quad \dim_H(L(F) \cap L_c) = \dim_H(proj_\theta F),$$

y

$$(4.12) \quad \mathcal{L}_1(L(F) \cap L_c) = 0 \text{ si y solo si } \mathcal{L}_1(proj_\theta F) = 0.$$

Con este resultado vemos que para calcular la dimensión y la medida de Lebesgue de la proyección de un conjunto de puntos podemos trabajar en vez de con el conjunto en sí con  $L(F)$ .

Ahora probamos un teorema que nos permitirá calcular la dimensión de un conjunto de Besicovitch.

**Teorema 4.9.** Sea  $L(F)$  el conjunto de rectas que corresponde a un conjunto de Borel  $F \subset \mathbb{R}^2$  (como hemos definido antes). Entonces:

$$(a) \quad \dim_H L(F) \geq \min\{2, 1 + \dim_H F\}.$$

$$(b) \quad \text{Si } F \text{ es un 1-conjunto entonces el } \mathcal{L}_2(L(F)) = 0 \text{ si y solo si } F \text{ es irregular.}$$

*Demostración.* (a) Por la proposición 3.19,  $\dim_H(proj_\theta F) = \min\{1, \dim_H F\}$  para casi todo  $\theta \in [0, \pi)$ , por la ecuación 4.11  $\dim_H(L(F) \cap L_c) = \min\{1, \dim_H F\}$  para casi todo  $-\infty < c < \infty$ . Se sigue la parte (a) del corolario 3.25.

(b) Sea  $F$  un 1-conjunto. El corolario 3.22 nos afirma que si  $F$  es irregular entonces  $\mathcal{L}_1(proj_\theta F) = 0$  para casi todo  $\theta$ , sino  $\mathcal{L}_1(proj_\theta F) > 0$  para casi todo  $\theta$ . Usando la ecuación 4.12 obtenemos el enunciado dual que es que si  $F$  es irregular entonces  $\mathcal{L}_1(L(F) \cap L_c) = 0$  para todo  $c$ , en caso contrario  $\mathcal{L}_1(L(F) \cap L_c) > 0$  para casi todo  $c$ . Puesto que  $\mathcal{L}_2(L(F)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_1(L(F) \cap L_c) dc$ , se sigue la proposición.  $\square$

En 1917 Kakeya planteó el problema de encontrar el conjunto del plano de menor área, en el cuál un segmento unidad puede ser revertido, i.e., puede moverse de forma continua sin que salga del conjunto el segmento para que vuelva a su posición original pero rotado  $180^\circ$ . Se puede demostrar que existen conjuntos con esta propiedad de medida arbitrariamente pequeña aunque, como se puede ver en [16], siempre de medida estrictamente positiva. Un problema estrechamente relacionado consiste en encontrar la región del plano más pequeña que contiene un segmento unidad en cada dirección. Es decir, hemos relajado el problema quitando la condición de que el segmento unidad pueda ser movido de forma continua sin que salga del conjunto. Se llama conjunto de Besicovitch a cualquier conjunto que verifica las condiciones del problema anterior.

**Teorema 4.10.** *Hay un conjunto del plano de medida de Lebesgue cero que contiene un segmento unidad en todas las direcciones. Cualquier conjunto de Borel con esta propiedad tiene dimensión de Hausdorff 2.*

Antes de probar este teorema demostramos antes la siguiente proposición. En su demostración construiremos un conjunto que luego usaremos para construir un conjunto con un segmento unidad en todas las direcciones del plano.

**Teorema 4.11.** *Existe un 1-conjunto irregular en  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Sea  $f$  una función real en  $[0, 1)$  definida como:

$$f(.x_1x_2\dots) = .y_1y_2\dots,$$

Donde  $.x_1x_2\dots$  y  $.y_1y_2\dots$  están escritos en base 4 de manera que  $y_i = 5 - x_i \pmod{4}$ .

Sea entonces  $F = \{(x, f(x)) : 0 \leq x < 1\}$ .  $F$  es un conjunto de Borel, y como la proyección sobre el eje  $x$  tiene longitud 1, se sigue  $1 \geq \mathcal{H}_1(F)$ . Por otro lado,  $F$  puede ser recubierto por  $4^k$  cuadrados de longitud  $4^{-k}$  para todo  $k$ , luego  $\mathcal{H}_1(F) \leq \sqrt{2}$ . Por tanto  $F$  es un 1-conjunto. La irregularidad de este conjunto se sigue del hecho de que  $F$  tiene proyecciones de medida 0 respecto al eje  $x$  en las direcciones  $\pm 45^\circ$ , ver corolario 3.22.  $\square$

Ahora probamos el teorema 4.10. En la demostración hacemos referencia a la existencia de un conjunto irregular del plano cuya proyección sobre el eje  $y$  contiene al intervalo  $[0, 1]$ , el conjunto construido justo antes es un ejemplo.

*Demostración.* Sea  $F$  cualquier conjunto 1-conjunto irregular tal que la proyección de  $F$  en el eje  $y$ ,  $proj_{\pi/2}F$  contiene al intervalo  $[0, 1]$  (Ver por ejemplo el conjunto del teorema 4.11). Puesto que  $F$  es irregular,  $\mathcal{L}_2(L(F)) = 0$  por la proposición 4.9 (b). Sin embargo puesto que  $[0, 1] \subset proj_{\pi/2}F$ , el conjunto  $L(F)$  contiene rectas que intersecan con el eje  $x$  para todos los ángulos entre 0 y  $\pi/4$ . Tomando  $L(F)$ , junto con copias rotadas  $\pi/4$ ,  $\pi/2$  y  $3\pi/4$  obtenemos un conjunto de área cero que contiene una línea en todas las direcciones.

Para ver que tal conjunto tiene dimensión Hausdorff 2, suponemos que  $E$  contiene una línea en cada dirección. Si

$$F = \{(a, b) : L(a, b) \subset E\},$$



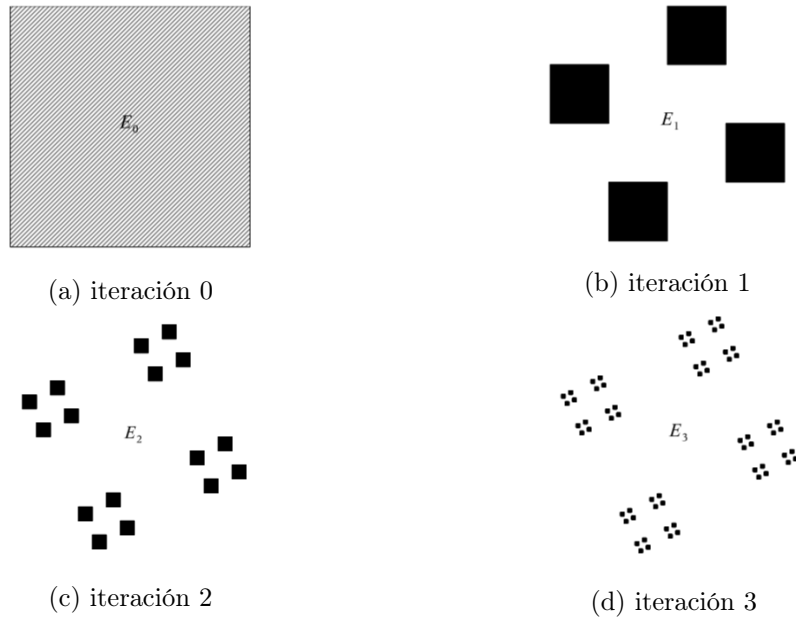


Figura 4.2: 4 primeras iteraciones del conjunto  $F$  contruido en la demostración del teorema 4.11

entonces  $proj_{\pi/2}F$  es el eje  $y$  en sus totalidad. La proyección tiene dimensión menor o igual que la del conjunto original, luego  $\dim_H F \geq 1$ . Por la proposición 4.9 (a)  $\dim_H L(F) = 2$  y como  $L(F) \subset E$  se sigue que  $\dim_H E = 2$ .  $\square$

### 4.3. Iteración de funciones complejas. Conjuntos de Julia

Los conjuntos de Julia son uno de los ejemplos más pintorescos de como procesos muy sencillos pueden conducir a conjuntos muy complicados. Los conjuntos de Julia aparecen como iteraciones de una función compleja  $f$ ; están por tanto relacionados con sistemas dinámicos.

En esta sección daremos primero la definición clásica de conjunto de Julia. Posteriormente, enunciaremos el teorema de Montel y gracias a este definiremos alternativamente el conjunto de Julia. Probaremos al final de la sección que ambas definiciones son equivalentes. Usando la definición alternativa demostraremos una serie propiedades que caracterizan a los conjuntos de Julia de funciones polinómicas y que los hacen muy especiales.

#### 4.3.1. Teoría general de los conjuntos de Julia

En esta sección consideramos  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , un polinomio de grado  $n \geq 2$  con coeficientes complejos.

**Notación.** Escribimos  $f^k$  para denotar la iteración  $k$ -ésima de  $f$  dada por  $f^0(w) = w$ ,  $f^k(w) = f(f^{k-1}(w))$  para  $k \geq 1$  y con  $w \in \mathbb{C}$ .

A continuación damos la definición del conjunto de Julia así como la de su complementario.

**Definición 4.12.** El conjunto de Julia de  $f$ ,  $J(f)$  se define como el cierre del conjunto de puntos periódicos repelentes de  $f$ ; es decir el cierre del conjunto de aquellos puntos  $w$  que cumplen que  $\exists p \geq 1$  entero tal que  $f^p(w) = w$ , con  $p$  el mínimo entero  $\geq 1$  que verifica esta propiedad y además  $|(f^p)'(w)| > 1$ .

**Definición 4.13.** El complementario del conjunto de Julia se llama conjunto de Fatou o conjunto estable,  $F(f)$ .

A continuación, damos la definición de familia normal de funciones analíticas complejas y posteriormente enunciamos el teorema de Montel en su versión más fuerte.

**Definición 4.14.** Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$  una familia de funciones analíticas complejas.

La familia  $\{g_k\}$  es normal en  $U$  si toda sucesión de funciones de  $\{g_k\}$  tiene un subsucesión que converge uniformemente en todo subconjunto compacto de  $U$  ya sea a una función analítica o a  $\infty$ .

Se dice que la familia  $\{g_k\}$  es normal en un punto  $w \in U$  si existe un conjunto abierto  $V \subset U$  con  $w \in V$  y tal que  $\{g_k\}$  sea una familia normal en  $V$ .

Para desarrollar la teoría, necesitamos el siguiente teorema,

**Teorema 4.15** (Teorema de Montel). *Sea  $\{g_k\}$  familia de funciones analíticas complejas en un dominio abierto  $U$ . Si  $\{g_k\}$  no es una familia normal, entonces  $\forall w \in \mathbb{C}$  con como mucho una excepción se tiene que  $g_k(z) = w$  para algún  $z \in U$  y para algún  $k$ .*

*Demostración.* Esta es una versión más fuerte del teorema clásico de Montel que se conoce a veces como "Prueba fundamental de normalidad", véase [3, p. 300].  $\square$

**Definición 4.16.** Dado  $f$ , un polinomio complejo de grado  $n \geq 2$ , se define,

$$(4.13) \quad J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ no es normal en } z\}.$$

Usando el teorema de Montel demostraremos que  $J_0(f)$  es igual al cierre del conjunto de puntos periódicos repelentes,  $J(f)$ , (ver teorema 4.25).

Definimos también el complementario de  $J_0$  como:

$$(4.14) \quad F_0(f) \equiv \mathbb{C} \setminus J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \exists V \text{ abierto con } z \in V \text{ y } \{f^k\} \text{ normal en } V\}.$$

A continuación enunciamos y demostraremos propiedades del conjunto de Julia de  $f$  y probaremos que  $J_0(f) = J(f)$ .

Primero veremos que para el caso que estamos estudiando, el conjunto de Julia es un conjunto compacto y no vacío.

**Teorema 4.17.** *Si  $f$  es un polinomio de grado  $\geq 2$ , entonces  $J_0(f)$  es compacto.*

*Demostración.* Vemos que el complementario de  $F_0(f)$  (ver 4.14) es abierto, luego  $J_0(f)$  es cerrado. Al ser  $f$  un polinomio de grado  $\geq 2$ , podemos encontrar un  $r$  tal que  $|f(z)| \geq 2|z|$  si  $|z| \geq r$ . Se sigue  $|f^k(z)| > 2^k|z|$  si  $|z| > r$ . Luego  $f^k(z) \rightarrow \infty$  uniformemente en el conjunto abierto  $V = \{z : |z| > r\}$ . Por definición,  $\{f^k\}$  es normal en  $V$ , luego  $V \subset \mathbb{C} \setminus J_0(f)$ . Por tanto  $J_0(f)$  está acotado y en consecuencia es compacto.  $\square$

**Teorema 4.18.**  *$J_0(f)$  es no vacío.*

*Demostración.* Supongamos que  $J_0(f) = \emptyset$ . Entonces, para cada  $r > 0$  la familia  $\{f^k\}$  es normal en el disco abierto  $B_r(0)$  con centro en el origen y radio  $r$ . Como  $f$  es un polinomio, tomando  $r$  suficientemente grande se tiene que existe un punto  $z$  tal que  $|f^k(z)| \rightarrow \infty$  y también contiene un punto fijo de  $w$  de  $f$  con  $f^k(w) = w$  para todo  $k$ . Es imposible para una subsucesión de  $\{f^k\}$  converger uniformemente a una función acotada o a infinito en cualquier subconjunto compacto de  $B_r(0)$  que contiene a la vez  $z$  y  $w$ , contradiciendo así la normalidad de  $\{f^k\}$ .  $\square$

**Teorema 4.19.**  *$J_0(f)$  es invariante por  $f$ , es decir  $J_0 = f(J_0) = f^{-1}(J_0)$ .*

*Demostración.* Mostramos equivalentemente que el complementario  $F_0(f)$  es invariante. Sea  $V$  un conjunto abierto con  $\{f^k\}$  normal en  $V$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(V)$  es abierto. Sea  $\{f^{k_i}\}$  una subsucesión de  $\{f^k\}$ . Entonces  $\{f^{k_i+1}\}$  posee una subsucesión  $\{f^{k'_i+1}\}$  que es uniformemente convergente en cualquier subconjunto compacto de  $V$ . Luego si  $D$  es un subconjunto compacto de  $f^{-1}(V)$  entonces  $\{f^{k'_i+1}\}$  es uniformemente convergente en el conjunto compacto  $f(D)$ , luego  $\{f^{k'_i}\}$  es uniformemente convergente en  $D$ . Por tanto  $\{f^k\}$  es normal en  $f^{-1}(V)$  y se sigue que  $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$ .

La inclusión opuesta se obtiene de forma similar, teniendo en cuenta que  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una aplicación abierta (i.e.,  $f(V)$  es abierta para todo  $V$  abierto).  $\square$

**Teorema 4.20.**  *$J_0(f^p) = J_0(f)$  para todo entero positivo  $p$ .*

*Demostración.* De nuevo trabajamos con  $F_0$ . Si cada sucesión de  $\{f^k\}$  tiene una subsucesión uniformemente convergente dado un conjunto, lo mismo es verdad para  $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$ . Luego  $F_0(f) \subset F_0(f^p)$ .

Si  $D$  es compacto y  $\{g_k\}$  es una familia de funciones uniformemente convergentes en  $D$  ya sea a una función acotada o a  $\infty$ , entonces lo mismo es verdad para  $\{h \circ g_k\}$  para cualquier polinomio  $h$ . Luego si  $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$  es normal en un conjunto abierto  $V$ , entonces lo es  $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$  con  $r = 0, 1, \dots, p-1$ . Pero cualquier subsucesión de  $\{f^k\}_{k \geq 1}$  contiene una subsucesión infinita de  $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$  para algún entero  $r$  con  $0 \leq r \leq p-1$ , la cual tiene una subsucesión que converge uniformemente en un subconjunto compacto de  $V$ . Por tanto  $\{f^k\}$  es normal, y  $F_0 \supset F_0(f^p)$ .  $\square$

El siguiente resultado nos dice que las iteraciones de  $f$  diseminan por todo el plano complejo vecindades de puntos de  $J_0$ .

**Lema 4.21.** Sea  $f$  un polinomio de grado  $\geq 2$ , sea  $w \in J_0(f)$  y sea  $U$  un entorno de  $w$ . Entonces,  $W \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$  es  $\mathbb{C}$  salvo quizás un punto. Tal punto no está en  $J_0(f)$  y es independiente de  $w$  y de  $U$ .

*Demostración.* Por definición de  $J_0$ , la familia  $\{f^k\}$  no es normal en  $w$ , luego la primera parte del enunciado es inmediata por el teorema de Montel.

Supongamos que  $v \notin W$ . Si  $f(z) = v$ , entonces como  $f(W) \subset W$ , se sigue que  $z \notin W$ . Como  $\mathbb{C} \setminus W$  consiste en como mucho un punto, entonces  $z = v$ . Luego  $f$  es un polinomio de grado  $n \geq 2$  tal que la única solución de  $f(z) - v = 0$  es  $v$ , lo que implica que  $f(z) - v = c(z - v)^n$  para una constante  $c$ .

Si  $z$  es suficientemente cercano a  $v$  entonces  $f^k(z) - v \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , converge uniformemente. Luego  $\{f^k\}$  es normal en  $v$ , por tanto el punto excepcional  $v \notin J_0(f)$ . Claramente  $v$  solo depende del polinomio  $f$ .  $\square$

**Corolario 4.22.** Con las condiciones anteriores, se tiene:

- (a) Si  $U$  es un conjunto abierto intersecando  $J_0(f)$  entonces  $f^{-k}(z)$  interseca  $U$  en una infinidad de valores de  $k$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  salvo como mucho en un punto.
- (b) Si  $z \in J_0(f)$  entonces  $J_0(f)$  es el cierre de  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$

*Demostración.* (a) Dado  $z$  un punto no excepcional del lema 4.21,  $z \in f^k(U)$  luego  $f^{-k}(z)$  interseca  $U$  para algún  $k$ . Usando este argumento repetidamente obtenemos una secuencia infinita de  $k$  con  $f^{-k}(z)$  intersecando  $U$ .

- (b) Si  $z \in J_0(f)$  entonces  $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$  por la propiedad 4.19, luego  $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset J_0(f)$ . Por otro lado, si  $U$  es un conjunto abierto que contiene  $z \in J_0(f)$ , entonces  $f^{-k}(z)$  interseca  $U$  para algún  $k$  por (a).  $z$  no puede ser un punto de excepción por el lema 4.21.  $\square$

Otra consecuencia inmediata del lema 4.21 es que  $J_0(f)$  no puede ser “muy grueso”.

**Corolario 4.23.** Si  $f$  es un polinomio de grado  $\geq 2$ ,  $J_0(f)$  tiene un interior vacío.

*Demostración.* Supongamos que  $J_0(f)$  contiene un conjunto abierto  $U$ . Entonces  $f^k(U) \subset J_0(f)$  para todo  $k$  por la proposición 4.19, luego  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \subset J_0(f)$ . Por el lema 4.21,  $J_0(f)$  es todo  $\mathbb{C}$  excepto quizás un punto, contradiciendo la propiedad 4.17 de que  $J_0(f)$  está acotado.  $\square$

**Teorema 4.24.**  $J_0$  es un conjunto perfecto (i.e., cerrado y sin puntos aislados) y por lo tanto no numerable.

*Demostración.* Sea  $v \in J_0(f)$  y sea  $U$  un entorno de  $v$ . Mostramos ahora que  $U$  contiene otros puntos de  $J_0(f)$ . Consideramos tres casos:

- (a)  $v$  no es ni un punto fijo ni un punto periódico de  $f$ . Por el corolario 4.22 (b) y por la propiedad 4.19,  $U$  contiene un punto  $f^{-k}(v) \in J_0(f)$  para algún  $k \geq 1$ , y este punto debe ser diferente de  $v$ .
- (b)  $f(v) = v$ . Si  $f(z) = v$  no tiene otra solución que no sea  $v$ , entonces, como en la prueba del lema 4.21,  $v \notin J_0(f)$ . Entonces, existe  $w \neq v$  con  $f(w) = v$ . Por el corolario 4.22 (b),  $U$  contiene un punto de  $f^{-k}(w)$  para algún  $k \geq 1$ . Tal punto está en  $J_0(f)$  por invarianza y es distinto de  $v$ , puesto que  $f^k(v) = v$ .
- (c)  $f^p(v) = v$  para algún  $p > 1$ . Por el teorema 4.20,  $J_0(f) = J_0(f^p)$ , luego aplicando el punto anterior a  $f^p$  vemos que  $U$  contiene puntos de  $J_0(f^p) = J_0(f)$  distintos de  $v$ .

□

Probamos ahora que  $J_0(f)$ , el conjunto de puntos de no normalidad de  $\{f^k\}$ , es igual a  $J(f)$ , el cierre de los puntos periódicos repelentes de  $f$ .

**Teorema 4.25.** *Si  $f$  es un polinomio de grado  $\geq 2$ , entonces  $J(f) = J_0(f)$ .*

*Demostración.* Sea  $w$  un punto periódico repelente de  $f$ , con periodo  $p$ , luego  $w$  es un punto fijo repelente de  $g = f^p$ . Supongamos que  $\{g^k\}$  es normal en  $w$ , entonces  $w$  posee un entorno abierto de  $V$  con una subsucesión  $\{g^{k_i}\}$  que converge a una función analítica  $g_0$  (no puede converger a  $\infty$  pues  $g^k(w) = w$  para todo  $k$ ). Por un resultado estándar del análisis complejo (ver [3, p. 73]), las derivadas también convergen,  $(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z)$  si  $z \in V$ . Sin embargo, por la regla de la cadena,  $|(g^{k_i})'(w)| = |(g'(w))^{k_i}| \rightarrow \infty$  puesto que  $w$  es un punto fijo repelente y  $|g'(w)| > 1$ . Esto contradice la finitud de  $g_0'(w)$ , luego  $\{g^k\}$  no puede ser normal en  $w$ . Por tanto  $w \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$ , por la proposición 4.20. Como  $J_0(f)$  es cerrado, se sigue que  $J(f) \subset J_0(f)$ .

Sea  $K = \{w \in J_0(f) \text{ tal que existe } z_0 \neq w \text{ con } f(z_0) = w \text{ y } f'(z_0) \neq 0\}$ . Supongamos que  $w \in K$ . Entonces hay un entorno abierto  $V$  de  $w$  en el cual podemos encontrar una inversa local analítica  $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ , luego  $f(f^{-1}(z)) = z$  para  $z \in V$ . Definimos una familia de funciones analíticas  $\{h_k\}$  en  $V$  por:

$$h_k(z) = \frac{(f^k(z) - z)}{(f^{-1}(z) - z)}.$$

Sea  $U$  cualquier entorno abierto de  $w$  con  $U \subset V$ . Como  $w \in J_0(f)$  la familia  $\{f^k\}$ , y por tanto la familia  $\{h_k\}$  no es normal en  $U$ . Por el teorema de Montel,  $h_k(z)$  debe valer 0 ó 1 para algún  $k$  y  $z \in U$ . En el primer caso  $f^k(z) = z$  para algún  $z \in U$ ; en el segundo caso  $f^k(z) = f^{-1}(z)$  luego  $f^{k+1}(z) = z$  para algún  $z \in U$ . Por tanto  $U$  contiene un punto periódico de  $f$ , luego  $w \in J(f)$ . Hemos probado que  $K \subset J(f)$ ; tomando los cierres  $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$ . Sin embargo,  $K$  contiene todos los puntos de  $J_0(f)$  exceptuando un número finito. Como  $J_0(f)$  no contiene puntos aislados, por el teorema 4.24,  $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$ . □

**Definición 4.26.** Sea  $w$  un punto fijo de atracción de  $f$ , es decir, un punto  $w$  que verifica que  $|f'(w)| < 1$ . Entonces se define la cuenca de atracción de  $w$  como:

$$(4.15) \quad A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow w \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}.$$

Definimos la cuenca de atracción de infinito  $A(\infty)$  de la misma manera.

**Observación.**  $A(w)$  es un conjunto abierto.

Como  $w$  es un punto de atracción, existe un conjunto abierto  $V \subset A(w)$  que contiene a  $w$  (si  $w = \infty$  podemos tomar  $\{z : |z| > r\}$ , para un  $r$  suficientemente grande). Esto implica que  $A(w)$  es abierto, pues si  $f^k(z) \in V$  para algún  $k$ , entonces  $z \in f^{-k}(V)$ , el cuál es abierto.

La siguiente caracterización de  $J$  como la frontera de cualquier cuenca de atracción, es de gran utilidad a la hora de determinar el conjunto de Julia.

**Lema 4.27.** Sea  $w$  un punto fijo de atracción de  $f$ . Entonces  $\partial A(w) = J(f)$ . Lo mismo es verdad si  $w = \infty$ .

*Demostración.* Si  $z \in J(f)$  entonces  $f^k(z) \in J(f)$  para todo  $k$ , luego no puede converger a un punto fijo de atracción, y  $z \notin A(w)$ . Sin embargo, si  $U$  es un entorno de  $z$ , el conjunto  $f^k(U)$  contiene puntos de  $A(w)$  para algún  $k$  por el lema 4.21, luego hay puntos arbitrariamente cercanos a  $z$  que iteran a  $w$ . Se sigue que  $z \in \partial A(w)$  y por tanto  $z \in J(f)$ .

Supongamos que  $z \in \partial A(w)$  pero  $z \notin J(f) = J_0(f)$ . Entonces  $z$  tiene un entorno  $V$  abierto conexo en el cuál  $\{f^k\}$  tiene una subsucesión convergente a una función analítica o a  $\infty$ . La subsucesión converge a  $w$  en  $V \cap A(w)$ , que es abierto y no vacío, y por tanto dicho límite es una función constante en  $V$ , pues una función analítica es constante en un conjunto conexo si es constante en algún subconjunto abierto. Todos los puntos de  $V$  se corresponden con puntos de  $A(w)$  por iteraciones de  $f$ , luego  $V \subset A(w)$ , contradiciendo la hipótesis de que  $z \in \partial A(w)$ .  $\square$

**Conclusión.** El conjunto de Julia  $J(f)$  es el cierre de los puntos periódicos repelentes del polinomio  $f$ . Es un conjunto compacto no numerable que no posee ningún punto aislado y que es invariante bajo  $f$  y  $f^{-1}$ . Si  $z \in J(f)$ , entonces  $J(f)$  es el cierre de  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ . El conjunto de Julia es la frontera de la cuenca de atracción de cada punto fijo de atracción de  $f$ , incluyendo  $\infty$ , y  $J(f) = J(f^p)$  para cada entero positivo  $p$ .

### 4.3.2. Funciones Cuadráticas. El conjunto de Mandelbrot

Estudiamos ahora los conjuntos de Julia de polinomios de la forma:

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

**Definición 4.28.** Se define el conjunto Mandelbrot como:

$$(4.16) \quad M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\}.$$

Sin embargo esta definición del conjunto de Mandelbrot es poco útil si se desea aproximarlos computacionalmente. Obtenemos por tanto una caracterización alternativa al conjunto de Mandelbrot en términos de iteraciones de  $f_c$ .

**Lema 4.29.** *Sea  $C$  una curva de Jordan (que llamaremos lazo) en el plano complejo:*

- (a) *Si  $c$  está en el interior de  $C$  entonces  $f_c^{-1}(C)$  es un lazo, con la imagen inversa del interior de  $C$  como interior de  $f_c^{-1}(C)$ .*
- (b) *Si  $c$  está en  $C$  entonces  $f_c^{-1}(C)$  es una figura de ocho, tal que la imagen inversa del interior de  $C$  es el interior de los dos lazos del ocho.*

*Demostración.* Nótese que  $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$  y  $(f_c^{-1}(z))' = \pm\frac{1}{2\sqrt{z-c}}$ , que es finita y no nula si  $z \neq c$ . Por lo tanto si tomamos una de las dos ramas de  $f_c^{-1}$  el conjunto  $f_c^{-1}(C)$  es localmente una curva suave si  $c \notin C$ .

- (a) Supongamos que  $c$  está en el interior de  $C$ . Tomamos un punto inicial  $w$  en  $C$  y elegimos uno de los dos valores para  $f_c^{-1}(w)$ . Permitimos  $f_c^{-1}(w)$  variar de forma continua mientras  $z$  toma valores en  $C$ ,  $f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave. Cuando  $z$  vuelve a valer  $w$  entonces  $f_c^{-1}(w)$  toma el segundo valor. De nuevo  $z$  toma valores en  $C$  y  $f_c^{-1}(z)$  forma otra vez una curva suave, la cuál se cierra cuando  $z$  vuelve a  $w$  por segunda vez. Como  $c \notin C$ , tenemos que  $0 \notin f_c^{-1}(z)$ , luego  $f_c'(C) \neq 0$  en  $f_c^{-1}(C)$ . Luego  $f_c$  es localmente una biyección suave para puntos cercanos en  $f_c^{-1}(C)$ . En particular  $z \in f_c^{-1}(C)$  no puede ser un punto de auto-intersección de  $f_c^{-1}(C)$  pues sino  $f_c(z)$  también sería un punto de auto-intersección de  $C$ .

Como  $f_c$  es una función continua que asigna el lazo  $f_c^{-1}(C)$  y ningún punto más al lazo  $C$ , el polinomio  $f_c$  debe asignar el interior y el exterior de  $f_c^{-1}$  al interior y el exterior de  $C$  respectivamente. Por lo tanto  $f_c^{-1}$  asigna el interior de  $C$  al interior de  $f_c^{-1}(C)$ .

- (b) La prueba es análoga a la anterior. Se observa que si  $C_0$  es un trozo de curva suave que pasa por  $c$ , entonces  $f_c^{-1}(C_0)$  consiste en dos piezas de curvas suaves que pasan por  $0$  y se cruzan formando un ángulo recto, obteniendo así la auto-intersección de la figura de un ocho.

□

En seguida, damos una caracterización alternativa del conjunto de Mandelbrot en términos de las iteraciones de  $f_c$ .

**Teorema 4.30.**

$$(4.17) \quad M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ está acotado} \}$$

$$(4.18) \quad = \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}.$$

*Demostración.* Como hay un número  $r$  tal que  $|f_c(z)| > 2|z|$  si  $|z| > r$ , está claro que  $f_c^k(0) \rightarrow \infty$  si y solo si  $\{f_c^k(0)\}$  está acotado, luego 4.17 y 4.18 son iguales.

- (a) Vemos primero que si  $\{f_c^k(0)\}$  está acotado entonces  $J(f_c)$  es conexo. Sea  $C$  el círculo más grande en  $\mathbb{C}$  tal que todos los puntos  $\{f_c^k(0)\}$  están dentro de  $C$ , tal que  $f_c^{-1}(C)$  es el interior de  $C$  y tal que los puntos fuera de  $C$  iteran a infinito bajo  $f_c^k$ . Como  $c = f_c(0)$  está dentro de  $C$ , el lema 4.29 (a) afirma que  $f_c^{-1}(C)$  es un lazo contenido en el interior de  $C$ . También,  $f_c(c) = f_c^2(0)$  está dentro de  $C$  y  $f_c^{-1}$  asigna el exterior de  $C$  con el exterior de  $f_c^{-1}(C)$ , luego  $c$  está dentro de  $f_c^{-1}(C)$ . Por tanto  $f_c^{-2}(C)$  es un lazo contenido en el interior de  $f_c^{-1}(C)$ . Procediendo de esta manera vemos que  $\{f_c^{-k}(C)\}$  consiste en una secuencia de lazos, cada uno conteniendo al siguiente en su interior. Denotamos por  $K$  el conjunto cerrado de puntos que están dentro o sobre los lazos  $f_c^{-k}(C) \forall k$ . Si  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  alguna iteración está fuera de  $C$  entonces  $f_c^k \rightarrow \infty$ . Por lo tanto:

$$A(\infty) = \{z : f_c^k(z) \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty\} = \mathbb{C} \setminus K.$$

Por el lema 4.27,  $J(f_c)$  es la frontera de  $\mathbb{C} \setminus K$  la cual coincide con la frontera de  $K$ . Pero  $K$  es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos cerrados simplemente conexos. Luego por un argumento topológico,  $K$  es simplemente conexo y por tanto tiene una frontera conexa. Luego  $J(f_c)$  es conexo.

- (b) La prueba de que  $J(f_c)$  no es conexo si  $\{f_c^k(0)\}$  no está acotada es muy parecida. Sea  $C$  un círculo suficientemente grande tal que  $f_c^{-1}(C)$  está dentro de  $C$  y de tal modo que todos los puntos fuera de  $C$  iteran a  $\infty$  y tal que para algún  $p$ , el punto  $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$  con  $f_c^k(0)$  dentro o fuera de  $C$  dependiendo de si  $k$  es más pequeño o más grande que  $p$ . Como antes construimos un sucesión de lazos  $\{f_c^{-k}(C)\}$ , cada uno conteniendo el siguiente en su interior. Sin embargo el argumento esta vez falla para el lazo  $f_c^{1-p}(C)$ , puesto que  $c \in f_c^{1-p}(C)$  y el lema 4.29 (a) no se aplica. Pero por el lema 4.29 (b) obtenemos que  $E \equiv f^{-p}(C)$  es la figura de un ocho dentro del lazo  $f_c^{1-p}(C)$ , con  $f_c$  asignando el interior de cada mitad de  $E$  con el interior de  $f_c^{1-p}(C)$ . El conjunto de Julia  $J(f_c)$  debe estar en el interior del lazo de  $E$ , puesto que los demás punto iteran a infinito. Como  $J(f_c)$  es invariante bajo  $f_c^{-1}$ , las partes de este deben de estar contenidas en cada lazo de  $E$ . Luego la figura de ocho  $E$  desconecta  $J(f_c)$ .

□

Esta definición alternativa es la base de los dibujos a ordenador del conjunto de Mandelbrot. Se escogen números  $r, k_0$  de un orden grande. Para cada  $c$  se computa los términos de la secuencia  $\{f_c^k(0)\}$  hasta que  $|f_c^k| > r$ , en este caso se estima que  $c \notin M$ , o hasta que  $k = k_0$  en dicho caso se considera que  $c \in M$ . Se repite este proceso para todos los valores de  $c$  de una región que permita dibujar  $M$ . Generalmente se asignan distintos colores al complementario de  $M$  de acuerdo con el primer entero  $k$  tal que  $|f_c^k(0)| > r$  (ver apéndice E).



# Apéndice

---



## APÉNDICE A

# Dimensión Topológica

---

La dimensión topológica es, a fin de cuentas, la dimensión con la que estamos acostumbrados a trabajar. Poincaré, Brouwer (en 1913), Urysohn o Lebesgue intentaron dar una definición formal de la noción intuitiva de dimensión (ver [12, p. 409]). En este apéndice trabajaremos con la definición de dimensión topológica dada por Lebesgue. Para definirla necesitamos antes un par de definiciones sobre recubrimientos. Podemos encontrar las definiciones que introduciremos en [14] capítulo 50.

**Definición A.1.** Sea  $\mathcal{A}$  un recubrimiento de un conjunto de un espacio  $X$ . Un refinamiento de  $\mathcal{A}$  es otro recubrimiento  $\mathcal{B}$  del conjunto tal que si  $B \in \mathcal{B}$  entonces existe un  $A \in \mathcal{A}$  con  $B \subset A$ .

**Definición A.2.** Una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  se dice que tiene orden  $m + 1$  si algún punto de  $X$  pertenece a  $m + 1$  elementos de  $\mathcal{A}$ , y no existe ningún punto en  $X$  que pertenezca a más de  $m + 1$  elementos de  $\mathcal{A}$ .

Con estas definiciones ya estamos en condiciones de definir la dimensión topológica dada por Lebesgue.

**Definición A.3** (Dimensión de recubrimiento de Lebesgue). Un espacio  $X$  se dice que es de dimensión finita si existe algún entero  $m$  tal que para todo recubrimiento  $\mathcal{A}$  de  $X$  existe un recubrimiento abierto de  $\mathcal{B}$  de  $X$  que refina a  $\mathcal{A}$  y que tiene orden  $m + 1$  como máximo.

La dimensión topológica de  $X$  se define como el menor valor  $m$  que satisface lo anterior. La denotaremos por  $\dim_T X$ .

La dimensión topológica toma por tanto siempre valores enteros.

A continuación a modo de ejemplo probamos que cualquier subespacio compacto  $X$  de  $\mathbb{R}$  tiene como máximo dimensión topológica 1.

Comenzamos definiendo un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$  de orden 2. Sea  $\mathcal{A}_1$  la colección de intervalos abiertos de  $\mathbb{R}$  de la forma  $(n, n + 1)$ , donde  $n$  es un entero. Sea  $\mathcal{A}$  la colección de los intervalos abiertos  $(n - 1/2, n + 1/2)$ , donde  $n$  es de nuevo un entero. Entonces  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$  es un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$  por conjuntos de diámetro 1. Como dos elementos de  $\mathcal{A}_0$  siempre tienen intersección vacía, y lo mismo ocurre para dos elementos de  $\mathcal{A}_1$ , entonces  $\mathcal{A}$  tiene orden 2.

Sea  $X$  un subespacio compacto de  $\mathbb{R}$ . Dado un recubrimiento  $\mathcal{C}$  de  $X$  por subconjuntos abiertos en  $X$ , dicho recubrimiento tiene un número de Lebesgue  $\delta$  positivo (ver [14, p. 199]). Esto significa que cualquier familia de subconjuntos de  $X$  que tenga diámetro inferior a  $\delta$  es automáticamente un refinamiento de  $\mathcal{C}$ . Consideremos el homeomorfismo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $f(x) = (\frac{1}{2}\delta)x$ . Las imágenes a través de  $f$  de los elementos de  $\mathcal{C}$  constituyen un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$  de orden 2 cuyos elementos tienen un diámetro igual a  $\frac{1}{2}\delta$ ; sus intersecciones con  $X$  determinan el recubrimiento de  $X$  que íbamos buscando.

A continuación proporcionamos algunos hechos básicos sobre la dimensión topológica, las demostraciones se pueden encontrar en [14] capítulo 50.

**Teorema A.4.** *Sea  $X$  un espacio de dimensión finita. Si  $Y$  es un subespacio cerrado de  $X$  entonces  $Y$  tiene dimensión finita y  $\dim_T Y \leq \dim_T X$ .*

**Teorema A.5.** *Sea  $X = Y \cup Z$ , donde  $Y$  y  $Z$  son subespacios cerrados de  $X$  que tienen dimensión topológica finita. Entonces,*

$$\dim_T X = \max\{\dim_T Y, \dim_T Z\}.$$

**Corolario A.6.** *Sea  $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k$ , donde cada  $Y_i$  es un subespacio cerrado de  $X$  de dimensión finita. Entonces,*

$$\dim_T X = \max\{\dim_T Y_1, \dots, \dim_T Y_k\}.$$

**Teorema A.7** (Teorema de inmersión). *Todo espacio compacto metrizable  $X$  de dimensión topológica  $m$  puede ser inmerso en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  a través de un homeomorfismo sobre su imagen.*

**Teorema A.8.** *Todo subespacio compacto de  $\mathbb{R}^n$  tiene dimensión topológica  $n$  como máximo.*

**Corolario A.9.** *Toda  $m$ -variedad compacta tiene dimensión topológica  $m$ , como máximo.*

**Corolario A.10.** *Toda  $m$ -variedad compacta puede ser inmersa en  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .*

**Corolario A.11.** *Sea  $X$  un espacio compacto metrizable. Entonces  $X$  puede ser inmersa en algún espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  si, y sólo si,  $X$  tiene dimensión topológica finita.*

## APÉNDICE B

# Dimensión de Minkowski

---

En este apéndice presentaremos la dimensión de Minkowski y posteriormente estudiaremos la interrelación entre ésta y la dimensión de Hausdorff.

La definición de la dimensión de Minkowski es de los años treinta del siglo XX. Se la conoce como entropía de Kolmogorov, dimensión de entropía, dimensión capacitativa, dimensión métrica, densidad logarítmica o también dimensión de información. Para evitar confusión, a lo largo de este trabajo, la llamaremos dimensión de Minkowski. La dimensión de Minkowski es una de las nociones de dimensión más usadas debido principalmente a que, a diferencia de la dimensión de Hausdorff, es fácil de calcular y estimar empíricamente.

### B.1. Dimensión de Minkowski

A continuación damos dos definiciones equivalentes de dimensión de Minkowski. La segunda de ellas se suele usar para la estimación por ordenador de la dimensión de un fractal.

**Definición B.1.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F$  no vacío y acotado. Sea  $N_\delta(F)$  la cantidad más pequeña de conjuntos de diámetro menor o igual que  $\delta$  que recubren  $F$ . La dimensión de Minkowski inferior y superior se define respectivamente como:

$$(B.1) \quad \dim_B = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

$$(B.2) \quad \overline{\dim}_B = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Si los valores coinciden hablamos de dimensión de Minkowski:

$$(B.3) \quad \dim_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Existen otras formas equivalentes de definir la noción de dimensión de Minkowski. A la hora de estimar computacionalmente suele ser más útil usar una definición alternativa a la que acabamos de dar. A continuación expondremos una definición alternativa. Para ello primero deberemos mallar el espacio por cubos.

**Definición B.2** (malla  $\delta$ -coordenada). Sea la colección de cubos de la forma:

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta],$$

donde  $m_1, \dots, m_n$  son enteros. Entonces esta colección de cubos es una malla de anchura  $\delta$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición B.3.** Sea  $N'_\delta(F)$  número de cubos de la  $\delta$ -malla coordenada que intersecan con  $F$ . Considerando  $N'_\delta(F)$  en vez de  $N_\delta(F)$  definimos la dimensión de Minkowski inferior y superior como antes.

**Teorema B.4.** Las definiciones anteriores son equivalentes.

*Demostración.* Sea  $N'_\delta(F)$  el número de cubos de la malla  $\delta$ -coordenada de  $\mathbb{R}^n$  que intersecan con  $F$ . Tenemos por tanto una colección de  $N'_\delta(F)$  conjuntos de diámetro  $\delta\sqrt{n}$  que cubre  $F$ , luego,

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Si  $\delta\sqrt{n} < 1$  entonces:

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}.$$

Luego tomando límite  $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}, \\ \overline{\dim}_B F &\leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}. \end{aligned}$$

Por otro lado, cualquier conjunto de diámetro menor o igual a  $\delta$  está contenido en  $3^n$  cubos de la  $\delta$ -malla. Por tanto:

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F).$$

Tomando logaritmos obtenemos la desigualdad en sentido inverso. Queda probada la igualdad de ambas definiciones de la dimensión de Minkowski. Es decir, para calcular la dimensión de por caja de  $F$  podemos usar  $N'_\delta(F)$  el número de cubos de la  $\delta$ -malla coordenada que interseca  $F$ .  $\square$

Es importante entender la relación entre la dimensión de Minkowski y la dimensión de Hausdorff.

**Teorema B.5** (Relación entre dimensión de Minkowski y dimensión de Hausdorff). Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  entonces se tiene que:

$$(B.4) \quad \dim_H(F) \leq \dim_B(F).$$

*Demostración.* Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  tal que puede ser cubierto por  $N_\delta(F)$  conjuntos de diámetro  $\delta$ , entonces tenemos por definición:

$$\mathcal{H}_s^\delta(F) \leq N_\delta(F)\delta^s.$$

Supongamos que  $\dim_H F = s$ , entonces  $\forall s' \leq \dim_H F$  se tiene  $\mathcal{H}_{s'}(F) = \infty$ . Es decir,  $\forall M > 0, \exists \delta_0 > 0$  tal que  $\mathcal{H}_{s'}^\delta(F) \geq M \forall \delta \leq \delta_0$ . Luego

$$M \leq N_\delta(F) \delta^{s'}.$$

Tomando logaritmos,

$$\begin{aligned} \log M &\leq \log N_\delta(F) - s' \log \frac{1}{\delta}, \\ s' &\leq s' + \frac{\log M}{\log \frac{1}{\delta}} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{\log \frac{1}{\delta}}. \end{aligned}$$

Deducimos entonces que  $s' \leq \dim_B F$  y como  $s' < s$  es arbitrario, concluimos que  $s \leq \dim_B F$ .  $\square$

Como veremos en la próxima sección la dimensión de Minkowski tiene muchas infelices propiedades, que hace que sea difícil trabajar matemáticamente con ella.

## B.2. Propiedades de la Dimensión de Minkowski

En esta sección exponemos las propiedades elementales de la dimensión de Minkowski.

**Teorema B.6.** (a)  $\underline{\dim}_B$  y  $\overline{\dim}_B$  son monótonas.

(b)  $\overline{\dim}_B$  es finitamente estable, i.e.,  $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$ . Sin embargo  $\underline{\dim}_B$  no es.

(c)  $\underline{\dim}_B$  y  $\overline{\dim}_B$  son Lipschitz invariantes.

*Demostración.* Estas propiedades se pueden verificar de la misma manera que lo hicimos para las propiedades análogas de la dimensión de Hausdorff.  $\square$

Ahora exponemos algunas propiedades sorprendentes de la dimensión de Minkowski.

**Teorema B.7.** Sea  $\overline{F}$  el cierre de  $F$  (i.e., el subconjunto cerrado más pequeño de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $F$ ). Entonces:

$$(B.5) \quad \underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F,$$

$$(B.6) \quad \overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F.$$

*Demostración.* Sea  $B_1, B_2, \dots, B_k$  una colección finita de bolas cerradas de radio  $\delta$ . Si el conjunto cerrado  $\cup_{i=1}^k B_i$  contiene a  $F$ , entonces también contiene a  $\overline{F}$ . Por tanto el número más pequeño de bolas cerradas de radio  $\delta$  que recubre  $F$  es suficiente para recubrir  $\overline{F}$ . Se sigue por tanto el resultado.  $\square$

Una consecuencia inmediata es que si  $F$  es un subconjunto denso de una región abierta de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$ .

Por ejemplo, sea  $F$  el conjunto de los números racionales entre 0 y 1. Entonces  $\overline{F}$  es el intervalo  $[0, 1]$ . Por tanto  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$ . Luego conjuntos numerables pueden tener dimensión distinta de cero, sin embargo la dimensión de Minkowski de un número racional tomado como un conjunto formado por un solo punto es cero, pero la unión numerable es un conjunto con dimensión 1. Luego no es cierto que  $\dim_B \cup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \{\dim_B F_i\}$  (Estabilidad Numerable).



## APÉNDICE C

# Teorema de recubrimiento de Vitali y desigualdad isodiamétrica

---

**Teorema C.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una colección de bolas contenidas en un conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces podemos encontrar una subcolección disjunta numerable  $\{B_i\}$  tal que:*

$$(C.1) \quad \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \bigcup_i B'_i.$$

Donde  $B'_i$  es la bola concéntrica con  $B_i$  y con un radio cinco veces mayor.

*Demostración.* Seleccionamos los  $\{B_i\}$  inductivamente. Sea  $d_0 = \sup\{|B| : B \in \mathcal{C}\}$  y elegimos  $B_1$  de  $\mathcal{C}$  con  $|B_1| \geq \frac{1}{2}d_0$ . Si  $B_1, \dots, B_m$  han sido elegidos sea  $d_m = \sup\{|B| : B \in \mathcal{C}, B \cap (\bigcup_1^m B_i) = \emptyset\}$ . Si  $d_m = 0$  el proceso termina. En caso contrario elegimos  $B_{m+1}$  de  $\mathcal{C}$  disjunto de  $\bigcup_1^m B_i$  con  $|B_{m+1}| \geq \frac{1}{2}d_m$ . Estas bolas son disjuntas y afirmamos a su vez que tienen la propiedad de recubrimiento. Si  $B \in \mathcal{C}$ , entonces  $B = B_i$  para algún  $i$ , o  $B$  interseca con algún  $B_i$  con  $2|B_i| \geq |B|$ . Si esto no fuera cierto entonces  $B$  habría sido elegido antes que la primera bola  $B_m$  para la cual  $2|B_m| < |B|$ . En ambos casos,  $B \subset B'_i$  obteniendo así C.1.  $\square$

**Definición C.2.** Una colección de conjuntos  $\mathcal{V}$  es una clase de Vitali para  $E$  si para cada  $x \in E$  y  $\delta > 0$  existe  $U \in \mathcal{V}$  con  $x \in U$  y  $0 < |U| \leq \delta$ .

**Teorema C.3** (Teorema de recubrimiento de Vitali). (a) *Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto  $\mathcal{H}_s$ -medible y sea  $\mathcal{V}$  una clase de Vitali de conjuntos cerrados de  $E$ . Entonces podemos elegir una colección disjunta (finita o numerable)  $\{U_i\}$  de  $\mathcal{V}$  tal que  $\sum |U_i|^s = \infty$  o bien  $\mathcal{H}_s(E \setminus \bigcup_i U_i) = 0$ .*

(b) *Si  $\mathcal{H}_s(E) < \infty$ , entonces, dado  $\epsilon > 0$ , se tiene*

$$\mathcal{H}_s(E) \leq \sum_i |U_i|^s + \epsilon.$$

*Demostración.* Véase la demostración en [6, p. 13-14].  $\square$

**Teorema C.4** (Desigualdad isodiamétrica). *El volumen  $n$ -dimensional de un conjunto cerrado convexo de diámetro  $d$  es como mucho,  $\pi^{\frac{n}{2}} (\frac{d}{2})^n / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$ , que es el volumen de una bola  $n$ -dimensional de diámetro  $d$ .*



## APÉNDICE D

# Método de la Teoría de Potencial

---

En este apéndice definiremos primero, las ideas de  $s$ -potencial y  $s$ -energía. Luego relacionaremos la noción de energía con la medida y la dimensión de Hausdorff.

**Definición D.1.** Para  $s \geq 0$  se define el  $s$ -potencial en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  debido a la distribución de masa  $\mu$  en  $\mathbb{R}^n$  como,

$$(D.1) \quad \phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{\|x - y\|^s}.$$

La  $s$ -energía de  $\mu$  se define como,

$$(D.2) \quad I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\|x - y\|^s}.$$

El siguiente teorema relaciona la dimensión de Hausdorff con la aparentemente desconectada teoría del potencial.

**Teorema D.2.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$ :

- (a) Si existe una distribución de masa  $\mu$  en  $F$  con  $I_s(\mu) < \infty$  entonces  $\mathcal{H}_s(F) = \infty$  y  $\dim_H F \geq s$ .
- (b) Si  $F$  es un conjunto de Borel con  $\mathcal{H}_s(F) > 0$  entonces existe una distribución de masa  $\mu$  en  $F$  con  $I_t(\mu) < \infty$  para todo  $t < s$ .

*Demostración.* (a) Supongamos que  $I_s(\mu) < \infty$  para alguna distribución de masa con soporte contenido en  $F$ . Definimos,

$$F_1 = \left\{ x \in F : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s > 0 \right\}.$$

Si  $x \in F_1$  podemos encontrar  $\epsilon > 0$  y una sucesión  $\{r_i\}$  decreciente a 0 tal que  $\mu(B_{r_i}(x)) \geq \epsilon r_i^s$ . Salvo que  $\mu(\{x\}) > 0$  (en tal caso está claro que  $I_s(\mu) = \infty$ ) se sigue de la continuidad de  $\mu$  que, tomando  $q_i$  ( $0 < q_i < r_i$ ) suficientemente pequeño, obtenemos  $\mu(A_i) \geq \frac{1}{4}\epsilon r_i^s$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), donde  $A_i$  es el anillo  $B_{r_i}(x) \setminus$

$B_{q_i}(x)$ . Tomando subsucesiones si es necesario, podemos asumir que  $r_{i+1} < q_i \forall i$ , luego que los  $A_i$  son anillos disjuntos centrados en  $x$ . Por tanto para  $x \in F_1$ ,

$$\begin{aligned} \phi_s(x) &= \int \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^s} \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4} \epsilon r_i^s r_i^{-s} = \infty, \end{aligned}$$

pues  $\|x-y\|^{-s} \geq r_i^{-s}$  en  $A_i$ . Pero  $I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) < \infty$ , luego  $\phi_s(x) < \infty$  para casi todo  $x$  (con respecto a la medida  $\mu$ ). Concluimos que  $\mu(F_1) = 0$ . Como  $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s = 0$  si  $x \in F \setminus F_1$ , la proposición 2.12 (a) afirma que  $\forall c > 0$ , tenemos:

$$\mathcal{H}_s(F) \geq \mathcal{H}_s(F \setminus F_1)/c \geq (\mu(F) - \mu(F_1))/c = \mu(F)/c.$$

Por lo tanto  $\mathcal{H}_s(F) = \infty$ .

- (b) Supongamos que  $\mathcal{H}_s(F) > 0$ . Usamos  $\mathcal{H}_s$  para construir una distribución de masa  $\mu$  en  $F$  con  $I_t(\mu) < \infty$  para cualquier  $t < s$ .

Por el corolario 2.16 existe un conjunto compacto  $E \subset F$  con  $0 < \mathcal{H}_s(E) < \infty$  tal que,

$$\mathcal{H}_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s, \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

para alguna constante  $b$ . Sea  $\mu$  la restricción de  $\mathcal{H}_s$  a  $E$ , es decir  $\mu(A) = \mathcal{H}_s(E \cap A)$ ; luego  $\mu$  es una distribución de masa en  $F$ . Fijemos  $x \in \mathbb{R}^n$  y escribamos:

$$(D.3) \quad m(r) = \mu(B_r(x)) = \mathcal{H}_s(E \cap B_r(x)) \leq br^s.$$

Entonces, si  $0 \leq t < s$  se tiene,

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= \int_{\|x-y\| \leq 1} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^t} + \int_{\|x-y\| > 1} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^s} \\ &\leq \int_0^1 r^{-t} dm(r) + \mu(\mathbb{R}^n) \\ &= [r^{-t}m(r)]_0^1 + t \int_0^1 r^{-(t+1)} m(r) dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\ &\leq b + bt \int_0^1 r^{s-t-1} dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\ &= b \left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + \mathcal{H}_s(F), \end{aligned}$$

después de integrar por partes y usando la desigualdad D.3. Por tanto  $\phi_t(x) \leq c$ , luego  $I_t(\mu) = \int \phi_t(x) d\mu(x) \leq c\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ .

□

## APÉNDICE E

# Programas para el cómputo del conjunto de Mandelbrot

---

En este apéndice hacemos un estudio de distintos métodos para computar el conjunto de Mandelbrot. Calcularemos los tiempos de ejecución de diferentes códigos. Algunos de los códigos se diferencian de los anteriores simplemente en que realizan alguna operación diferentemente, otros realizan tareas en paralelo utilizando a veces el potencial de la GPU y finalmente algunos están incluso compilados.

Los tiempos de ejecución de un programa dependen mucho del ordenador usado así como del interprete de python. Todos los programas han sido ejecutados en MacBook Air con las siguientes características:

<b>Sistema operativo</b>	macOS High Sierra versión 10.13.4
<b>Procesador</b>	1 procesador (2 cores), 2,2 GHz Intel Core i7
<b>Memoria</b>	8 GB 1600 MHz DDR3
<b>Tarjeta gráfica</b>	Intel HD Graphics 6000 1536 MB

La versión de python usada es python 3.6.

Ahora vamos a importar algunos paquetes útiles primero.

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3 from matplotlib import colors
```

Para verificar la corrección del código, mostraremos las imágenes. Utilizamos tamaños de imagen pequeños para permitir una verificación rápida de todos los códigos, incluidos los más lentos.

```
1 def mandelbrot_image(xmin, xmax, ymin, ymax, width=3, height=3,
2   maxiter=80, cmap='hot'):
   dpi = 72
```

```

3     img_width = dpi * width
4     img_height = dpi * height
5     x,y,z = mandelbrot_set(xmin,xmax,ymin,ymax,img_width,
6         img_height,maxiter)
7     fig, ax = plt.subplots(figsize=(width, height),dpi=72)
8     ticks = np.arange(0,img_width,3*dpi)
9     x_ticks = xmin + (xmax-xmin)*ticks/img_width
10    plt.xticks(ticks, x_ticks)
11    y_ticks = ymin + (ymax-ymin)*ticks/img_width
12    plt.yticks(ticks, y_ticks)
13    norm = colors.PowerNorm(0.3)
14    z=np.array(z)
15    z.shape=(img_width,img_height)
16    ax.imshow(z.T,cmap=cmap,origin='lower',norm=norm)
17    plt.show()

```

## E.1. Código Base

Establezcamos el código base a partir del cuál comparar los efectos de los cambios que introduciremos.

Código Base (python Listas)

```

1 def mandelbrot(z,maxiter):
2     c = z
3     for n in range(maxiter):
4         if abs(z) > 2:
5             return n
6         z = z*z + c
7     return maxiter
8
9 def mandelbrot_set(xmin,xmax,ymin,ymax,width,height,
10    maxiter):
11    r1 = np.linspace(xmin, xmax, width)
12    r2 = np.linspace(ymin, ymax, height)
13    return (r1,r2,[mandelbrot(
14        complex(r, i),maxiter) for r in r1 for i in r2])

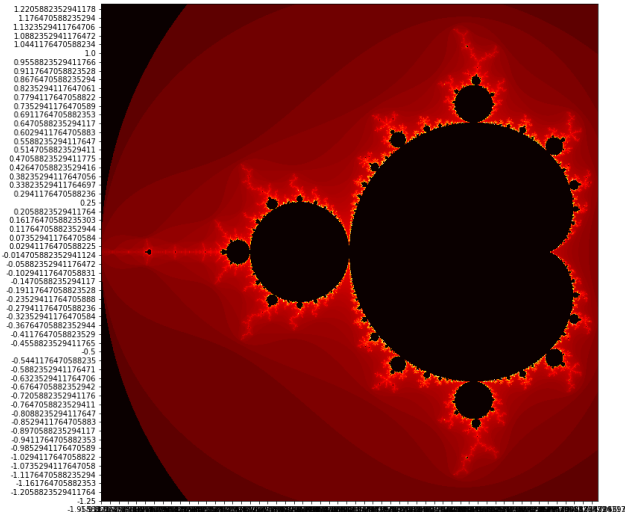
```

A continuación calculamos el tiempo de 10 interacciones del código anterior. Utilizamos para ello el módulo `timeit` el cuál nos permite evitar errores comunes a la hora de medir tiempos de ejecución. Por ejemplo, `timeit` desactiva temporalmente el recolector de basura. La ventaja de este enfoque es que hace que medidas de tiempo independientes sean más comparables.

```

1 import timeit
2 print(timeit.timeit("mandelbrot_set(xmin=-2,xmax=0.5,ymin
3     =-1.25,ymax=1.25,width=1000,height=1000,maxiter=80)",

```



Conjunto de Mandelbrot

```
setup="from __main__ import mandelbrot, mandelbrot_set",
      number=10))
```

Obtenemos un tiempo de 50,900 segundos es decir una media de 5,090 segundos por iteracion.

Revisemos que los resultados son correctos. Comprobamos con una imagen de pequeño tamaño dado que el código es muy lento.

## E.2. Numpy

Remplacemos ahora las listas Python por arrays Numpy.

Numpy versión 1

```
1 def mandelbrot(c,maxiter):
2     z = c
3     for n in range(maxiter):
4         if abs(z) > 2:
5             return n
6         z = z*z + c
7     return 0
8
9 def mandelbrot_set(xmin,xmax,ymin,ymax,width,height,maxiter
10 ):
    r1 = np.linspace(xmin, xmax, width)
```

```

11     r2 = np.linspace(ymin, ymax, height)
12     n3 = np.empty((width,height))
13     for i in range(width):
14         for j in range(height):
15             n3[i,j] = mandelbrot(r1[i] + 1j*r2[j],maxiter)
16     return (r1,r2,n3)

```

Análogamente calculamos el tiempo de ejecución de 10 iteraciones. Obtenemos un tiempo de 13,120 segundos por iteración, bastante peor que antes.

### E.3. Operaciones con array Numpy

Sin embargo si aprovechamos el potencial de los array Numpy podemos lograr mejores resultados.

#### Numpy versión 2

```

1 def mandelbrot_numpy(q, maxiter):
2     output = np.resize(np.array(0,), q.shape)
3     z = np.zeros(q.shape, np.complex64)
4     for it in range(maxiter):
5         z = z*z + q
6         done = np.greater(abs(z), 2.0)
7         q = np.where(done, 0+0j, q)
8         z = np.where(done, 0+0j, z)
9         output = np.where(done, it, output)
10    return output
11
12 def mandelbrot_set2(xmin, xmax, ymin, ymax, width, height,
13                    maxiter):
14     r1 = np.linspace(xmin, xmax, width)
15     r2 = np.linspace(ymin, ymax, height)
16     q = np.ravel(r1 + r2[:,None]*1j)
17     n3 = mandelbrot_numpy(q,maxiter)
18     n3 = n3.reshape((width,height))
19     return (r1,r2,n3.T)

```

Obtenemos un tiempo de 4,353 segundos por iteración.

Intentando ahora con el siguiente código:

#### Numpy versión 3

```

1 def mandelbrot_numpy(c, maxiter):
2     output = np.zeros(c.shape)
3     z = np.empty(c.shape, np.complex64)
4     output[:] = maxiter
5     for it in range(maxiter):

```



```

6     notdone = (output == maxiter)
7     z[notdone] = z[notdone]**2 + c[notdone]
8     output[notdone & (z.real*z.real + z.imag*z.imag >
9         4.0)] = it
    return output

```

Ahora cada iteración tarda 1,135 segundos.

El código se puede hacer más rápido realizando solo los cálculos necesarios.

#### Numpy versión 4

```

1 def mandelbrot_numpy(c, maxiter):
2     output = np.zeros(c.shape)
3     z = np.zeros(c.shape, np.complex64)
4     for it in range(maxiter):
5         notdone = np.less(z.real*z.real + z.imag*z.imag,
6             4.0)
7         output[notdone] = it
8         z[notdone] = z[notdone]**2 + c[notdone]
9     output[output == maxiter-1] = 0
10    return output
11 def mandelbrot_set2(xmin, xmax, ymin, ymax, width, height,
12    maxiter):
13     r1 = np.linspace(xmin, xmax, width, dtype=np.float32)
14     r2 = np.linspace(ymin, ymax, height, dtype=np.float32)
15     c = r1 + r2[:,None]*1j
16     n3 = mandelbrot_numpy(c, maxiter)
17    return (r1, r2, n3.T)

```

Y esta vez los resultados son 709 milisegundos por iteración de media.

## E.4. Numexpr

Podemos evitar la creación de arrays temporales y el uso más eficiente de la caché con NumExpr.

#### Numexpr

```

1 import numexpr as ne
2
3 def mandelbrot_numpy(c, maxiter):
4     output = np.zeros(c.shape)
5     z = np.zeros(c.shape, np.complex64)
6     for it in range(maxiter):
7         notdone = ne.evaluate('z.real*z.real + z.imag*z.
8             imag < 4.0')

```

```

8     output[notdone] = it
9     z = ne.evaluate('where(notdone, z**2+c, z)')
10    output[output == maxiter-1] = 0
11    return output

```

Obtenemos un tiempo de ejecución de 732 milisegundos de media. No obtenemos una mejoría respecto del código analizado en el apartado anterior, pero cabe esperar que para arrays mucho más grandes NumExpr aporte una mejora significativa.

## E.5. Numba

Podemos compilar fácilmente nuestro código con Numba, simplemente necesitamos anotar las funciones con el decorator @jit.

Numba versión 1

```

1  from numba import jit
2
3  @jit
4  def mandelbrot(c,maxiter):
5      z = c
6      for n in range(maxiter):
7          if abs(z) > 2:
8              return n
9          z = z*z + c
10     return 0
11
12  @jit
13  def mandelbrot_set(xmin,xmax,ymin,ymax,width,height,maxiter
14  ):
15     r1 = np.linspace(xmin, xmax, width)
16     r2 = np.linspace(ymin, ymax, height)
17     n3 = np.empty((width,height))
18     for i in range(width):
19         for j in range(height):
20             n3[i,j] = mandelbrot(r1[i] + 1j*r2[j],maxiter)

```

Obtenemos como tiempos 172 milisegundos de media para computar un conjunto de Mandelbrot.

Ahora hacemos una serie de pequeñas modificaciones en operacioens básicas del código anterior y vemos como esto afecta al rendimiento.

Primero calculamos la raíz cuadrada directamente sin el uso de la función abs.

Numba versión 2

```

1  @jit

```

```

2 def mandelbrot(c,maxiter):
3     z = c
4     for n in range(maxiter):
5         if z.real * z.real + z.imag * z.imag > 4.0:
6             return n
7         z = z*z + c
8     return 0

```

Obtenemos un tiempo de 110 milisegundos de media por iteracion, lo que es más rápido.

A continuación calculamos la parte imaginaria y real independientemente, es decir descomponemos el numero complejo en dos float.

Numba versión 3

```

1 @jit
2 def mandelbrot(creal,cimag,maxiter):
3     real = creal
4     imag = cimag
5     for n in range(maxiter):
6         real2 = real*real
7         imag2 = imag*imag
8         if real2 + imag2 > 4.0:
9             return n
10        imag = 2* real*imag + cimag
11        real = real2 - imag2 + creal
12    return 0

```

Obtenemos un tiempo de 116 milisegundos de media, lo cuál no es una mejoría.

## E.6. Numba Guvectorize

Con Numba Guvectorize podemos compilar “just-in-time” una función python a la vez que logramos paralelismo y todo esto de forma muy sencilla.

Numba Guvectorize

```

1 from numba import jit, vectorize, guvectorize, float64,
   complex64, int32, float32
2
3 @jit(int32(complex64, int32))
4 def mandelbrot(c,maxiter):
5     nreal = 0
6     real = 0
7     imag = 0
8     for n in range(maxiter):
9         nreal = real*real - imag*imag + c.real

```

```

10     imag = 2* real*imag + c.imag
11     real = nreal;
12     if real * real + imag * imag > 4.0:
13         return n
14     return 0
15
16 @guvectorize([(complex64[:], int32[:], int32[:])], '(n),()
17     ->(n)',target='parallel')
17 def mandelbrot_numpy(c, maxit, output):
18     maxiter = maxit[0]
19     for i in range(c.shape[0]):
20         output[i] = mandelbrot(c[i],maxiter)
21
22 def mandelbrot_set2(xmin, xmax, ymin, ymax, width, height,
23     maxiter):
24     r1 = np.linspace(xmin, xmax, width, dtype=np.float32)
25     r2 = np.linspace(ymin, ymax, height, dtype=np.float32)
26     c = r1 + r2[:,None]*1j
27     n3 = mandelbrot_numpy(c,maxiter)
28     return (r1,r2,n3.T)

```

El código anterior corre en un tiempo de 43 milisegundos de media por iteración. Por ahora es de lejos el mejor resultado obtenido.

## E.7. PyOpenCl

En esta sección trabajamos con PyOpenCl es decir el “wrapper” de Python de OpenCl. Reutilizamos el código repetitivo de la documentación de PyOpenCl tanto como sea posible.

```

1 from __future__ import absolute_import
2 from __future__ import print_function
3
4 import pyopencl as cl

```

Creamos un contexto interactivo para seleccionar qué dispositivo usar.

```

1 ctx = cl.create_some_context(interactive=True)
2 devices = ctx.get_info(cl.context_info.DEVICES)
3 print(devices)

```

### PyOpenCl

```

1 def mandelbrot_gpu(q, maxiter):

```

```
2
3     global ctx
4
5     queue = cl.CommandQueue(ctx)
6
7     output = np.empty(q.shape, dtype=np.uint16)
8
9     prg = cl.Program(ctx, """
10     #pragma OPENCL EXTENSION cl_khr_byte_addressable_store
11         : enable
12     __kernel void mandelbrot(__global float2 *q,
13         __global ushort *output, ushort const
14         maxiter)
15     {
16         int gid = get_global_id(0);
17         float nreal, real = 0;
18         float imag = 0;
19         output[gid] = 0;
20         for(int curiter = 0; curiter < maxiter; curiter++)
21             {
22                 nreal = real*real - imag*imag + q[gid].x;
23                 imag = 2* real*imag + q[gid].y;
24                 real = nreal;
25                 if (real*real + imag*imag > 4.0f){
26                     output[gid] = curiter;
27                     break;
28                 }
29             }
30     }
31     """).build()
32
33     mf = cl.mem_flags
34     q_opencl = cl.Buffer(ctx, mf.READ_ONLY | mf.
35         COPY_HOST_PTR, hostbuf=q)
36     output_opencl = cl.Buffer(ctx, mf.WRITE_ONLY, output.
37         nbytes)
38
39     prg.mandelbrot(queue, output.shape, None, q_opencl,
40         output_opencl, np.uint16(maxiter))
41
42     cl.enqueue_copy(queue, output, output_opencl).wait()
43
44     return output
45
```

```

42 def mandelbrot_set3(xmin, xmax, ymin, ymax, width, height,
43    maxiter):
44     r1 = np.linspace(xmin, xmax, width, dtype=np.float32)
45     r2 = np.linspace(ymin, ymax, height, dtype=np.float32)
46     c = r1 + r2[:,None]*1j
47     c = np.ravel(c)
48     n3 = mandelbrot_gpu(c, maxiter)
49     n3 = n3.reshape((width, height))
    return (r1, r2, n3.T)

```

Finalmente obtenemos usando como dispositivo la GPU de nuestro ordenador 23 milisegundos de media. Mientras que si usamos la CPU obtenemos un tiempo de 38 milisegundos de media. Una vez más los resultados son excelentes en comparación con el código base.

## E.8. Conclusiones

A continuación mostramos un resumen de los resultados obtenidos:

Programa	Paralelo	Compilado	tiempo CPU (seg)	tiempo GPU (seg)
Código Base (python Listas)	No	No	5.090	—
Numpy versión 1	No	No	13.120	—
Numpy versión 2	No	No	4.353	—
Numpy versión 3	No	No	1.135	—
Numpy versión 4	No	No	0.709	—
Numexpr	No	Si	0.732	—
Numba versión 1	No	Si	0.172	—
Numba versión 2	No	Si	0.110	—
Numba versión 3	No	Si	0.116	—
Numba Guvectorize	Si	Si	0.043	—
PyOpenCl	Si	Si	0.038	0.023

## APÉNDICE F

# Conjuntos de Julia de funciones Cuadráticas

---

En este apéndice estudiaremos la estructura del conjunto de Julia  $J(f_c)$  al variar  $c$  a lo largo del plano complejo. Caracterizaremos  $J(f_c)$  en función de los puntos periódicos de atracción de  $f_c$ . Se empezará entonces a distinguir las distintas partes del conjunto de Mandelbrot.

Los puntos periódicos de atracción de  $f_c$  son esenciales para entender la forma de  $J(f_c)$ .

**Teorema F.1.** *Si  $w \neq \infty$  es un punto periódico de atracción de un polinomio  $f$  de grado  $\geq 2$ , entonces existe un punto crítico  $z$ , tal que  $f^k(z)$  es atraído a la órbita periódica que contiene  $w$ .*

*Demostración.* Se puede encontrar la demostración de este teorema en [13, Teorema 8.6]. □

Como el único punto crítico de  $f_c$  es 0, concluimos que  $f_c$  tiene como mucho una órbita periódica de atracción. Además si  $c \notin M$  entonces por el teorema 4.30,  $f_c^k(0) \rightarrow \infty$ , luego  $f_c$  no tiene órbita periódica de atracción. Luego un análisis natural es caracterizar  $f_c$  por el periodo  $p$  de la órbita periódica de atracción. Los valores de  $c$  correspondiente a diferente  $p$  se identifican como diferentes regiones del conjunto de Mandelbrot.

### Valores de $c$ para los que $f_c$ no tiene órbita periódica de atracción.

Si  $c$  es muy grande entonces no pertenece al conjunto de Mandelbrot y por tanto  $f_c$  no tiene órbita periódica de atracción. A continuación probaremos que además cuando  $c$  es suficientemente grande el conjunto de Julia asociado  $J(f_c)$  es totalmente desconexo y obtendremos una estimación asintótica de su dimensión Hausdorff. Para ello primero necesitaremos probar dos lemas que son una adaptación del teorema 4.8. Con ellos podremos estimar la dimensión Hausdorff de un conjunto  $F$  invariante bajo contracciones.

**Lema F.2.** Sean  $S_1, \dots, S_m$  contracciones sobre un conjunto cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$  tales que,

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y|, \quad (x, y \in D),$$

con  $c_i < 1$  para cada  $i$ . Entonces  $\dim_H F \leq s$ , donde  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ .

*Demostración.* La prueba es esencialmente la misma que la primera parte de la demostración del teorema 4.8, salvo que esta vez tenemos la desigualdad  $|A_{i_1, \dots, i_k}| \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} |A|$  para cualquier conjunto  $A$  en vez de la igualdad.  $\square$

El siguiente lema nos permitirá calcular una cota inferior de la dimensión Hausdorff de  $F$ .

**Lema F.3.** Sean  $S_1, \dots, S_m$  contracciones sobre un conjunto cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$  tales que,

$$b_i |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)|, \quad (x, y \in D),$$

con  $0 < b_i < 1$  para cada  $i$ . Supongamos que  $F$  es invariante para los  $S_i$ ,

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(F),$$

con la unión disjunta. Entonces  $\dim_H F \geq s$  donde,

$$\sum_{i=1}^m b_i^s = 1.$$

*Demostración.* Sea  $d > 0$  la mínima distancia entre cualquier par de conjuntos compactos disjuntos  $S_1(F), \dots, S_m(F)$ , i.e.,  $d = \min_{i \neq j} \{\inf |x - y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}$ . Sea  $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \cdots S_{i_k}(F)$  y definamos  $\mu$  como  $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$ . Se tiene,

$$\sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \cdots b_{i_k} b_i)^s = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s = \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right).$$

Concluimos que  $\mu$  es una distribución de masa en  $F$  con  $\mu(F) = 1$ .

Si  $x \in F$ , hay una única sucesión infinita  $i_1, i_2, \dots$  tal que  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$  para cada  $k$ . Para  $0 < r < d$ , sea  $k$  el menor entero tal que,

$$b_{i_1} \cdots b_{i_k} \leq r < b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d.$$

Si  $i'_1, \dots, i'_k$  es distinto de  $i_1, \dots, i_k$ , los conjuntos  $F_{i_1, \dots, i_k}$  y  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  son disjuntos y los separa un espacio de distancia por lo menos  $b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d > r$ . Se sigue que  $F \cap B_r(x) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$  luego,

$$\mu(F \cap B_r(x)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Si  $U \cap F \neq \emptyset$ , entonces  $U \subset B_r(x)$  para algún  $x \in F$  con  $r = |U|$ . Luego  $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ . Por el principio de distribución de masa 2.12  $\mathcal{H}_s(F) > 0$  y  $\dim_H F \geq s$ .  $\square$



Probamos ahora el teorema que caracteriza la estructura de los conjuntos de Julia  $J(f_c)$  cuando  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$ .

**Teorema F.4.** *Supongamos que  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$ . Entonces  $J(f_c)$  es totalmente desconexo, y es un conjunto invariante por la contracción dada por las dos ramas de  $f_c^{-1}(c)$  para  $z$  cercano a  $J$ . Cuando  $|c|$  es grande, en un sentido que determinaremos más abajo,*

$$\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) \sim 2 \log 2 / \log |c|.$$

*Demostración.* Sea  $C$  el círculo  $|z| = |c|$  y  $D$  es el interior  $|z| < |c|$ . Entonces:

$$f_c^{-1}(C) = \{(c \cdot e^{i\theta} - c)^{1/2} : 0 \leq \theta \leq 4\pi\}.$$

Se trata de la figura de un ocho con auto-intersección en 0. Puesto que que  $|c| > 2$  tenemos que  $f_c^{-1}(C) \subset D$ .  $f_c$  asigna biyectivamente el interior de cada lazo de  $f_c^{-1}(C)$  con el interior de  $D$ . Si definimos  $S_1, S_2 : D \rightarrow D$  como cada una de las ramas de la inversa  $f_c^{-1}(z)$  restringidas al interior de los lazos del ocho, entonces  $S_1(D), S_2(D)$  son el interior de los dos lazos respectivamente.

Sea  $V = \{z : |z| < |2c|^{1/2}\}$ . Vemos que está contenido en  $f_c^{-1}(C)$ , por tanto  $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$ . Así pues  $S_1(V), S_2(V) \subset V$  con  $S_1(\bar{V})$  y  $S_2(\bar{V})$  disjuntos. Luego se tiene,

$$S'_1(z) = S'_2(z) = (f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-1/2}.$$

Por tanto si  $z \in \bar{V}$ ,

$$(F.1) \quad \frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq |S'_i(z)| \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}.$$

La cota superior es menor que 1 si  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$  en tal caso  $S_1$  y  $S_2$  son contracciones del disco  $\bar{V}$ . Por el teorema 2.12 hay un único conjunto  $F \subset \bar{V}$  compacto no vacío que satisface,

$$(F.2) \quad S_1(F) \cup S_2(F) = F.$$

Como  $S_1(\bar{V})$  y  $S_2(\bar{V})$  son disjuntos, lo son también  $S_1(F)$  y  $S_2(F)$ , lo que implica que  $F$  es totalmente desconexo. Evidentemente,  $F$  no es otra cosa que el conjunto de Julia de  $F = J(f_c)$ . Para ver esto, observamos que como  $\bar{V}$  contiene por lo menos un punto  $z \in J$ , concluimos que  $J = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(z)} \subset \bar{V}$ , pues  $f_c^{-k}(\bar{V}) \subset \bar{V}$ . Usando los resultados del resumen 4.3.1, sabemos que  $J$  es un subconjunto de  $\bar{V}$  compacto y no vacío que satisface  $J = f_c^{-1}(J)$  o, equivalentemente,  $J = S_1(J) \cup S_2(J)$ . Luego  $J = F$  que es el único conjunto compacto que satisface F.2.

Finalmente, estimamos la dimensión de  $J(f_c) = F$ . Usando F.1 y el análogo del teorema del valor medio para funciones complejas obtenemos,

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2},$$

con  $z_1, z_2 \in \bar{V}$ . Gracias a los lemas probados justo antes podemos obtener una cota inferior y superior para  $\dim_H J(f_c)$ . En efecto la solución de las ecuaciones  $2(\frac{1}{2}(|c| \pm$

$|2c|^{1/2})^{-1/2})^s = 1$ , i.e.,  $s = 2 \log 2 / \log 4(|c| \pm |2c|^{1/2})$  nos proporcionan una cota inferior y superior de  $\dim_H J(f_c)$ . Obtenemos por tanto la afirmación asintótica del enunciado.  $\square$

### Valores de $c$ para los que $f_c$ tiene un punto fijo de atracción.

Veremos ahora que la región principal del conjunto de Mandelbrot corresponde a los valores de  $c$  para los que  $f_c$  tiene un punto fijo de atracción. Estudiaremos también la forma de  $J(f_c)$  para este caso.

Supongamos  $c$  pequeño. Si  $c = 0$  entonces  $J(f_c)$  es el círculo unidad. Si  $c$  es suficientemente pequeño y  $z$  también, entonces  $f_c^k(z) \rightarrow w$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , donde  $w$  es un punto fijo de atracción  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$  cercano a 0. Por otro lado,  $f_c^k(z) \rightarrow \infty$  si  $z$  es grande. Es de esperar que el círculo se deforme en una curva simple cerrada separando estos dos tipos de comportamientos a la vez que  $c$  se aleja del 0.

El próximo teorema afirma que para  $|c|$  pequeño  $J(f_c)$  es una curva simple cerrada.

**Teorema F.5.** *Si  $|c| < \frac{1}{4}$  entonces  $J(f_c)$  es una curva simple cerrada.*

*Demostración.* Sea  $C_0$  la curva  $|z| = \frac{1}{2}$ , la cuál encierra tanto  $c$  como el punto fijo de atracción de  $f_c$ . Luego por un cálculo directo la imagen de la inversa vemos que  $f_c^{-1}(C_0)$  es el lazo  $C_1$  que rodea  $C_0$ . Podemos rellenar el anillo entre  $C_0$  y  $C_1$  con un continuo de curvas, a las que llamamos ‘trayectorias’, las cuáles abandonan  $C_0$  para alcanzar perpendicularmente  $C_1$ . Para cada  $\theta$  sea  $\psi_1(\theta)$  el punto en  $C_1$  situado en un extremo de la trayectoria que abandona  $C_0$  en  $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ . La imagen inversa  $f_c^{-1}(A_1)$  es el anillo  $A_2$  con frontera exterior el lazo  $C_2 = f_c^{-1}(C_1)$  y con frontera interior  $C_1$ . La imagen inversa de las trayectorias uniendo  $C_0$  con  $C_1$  proporciona una familia de trayectorias uniendo  $C_1$  con  $C_2$ . Sea  $\psi_2(\theta)$  el punto en  $C_2$  en el extremo de la trayectoria que parte de  $C_1$  en  $\psi_1(\theta)$ . Seguimos este proceso obteniendo así una secuencia de lazos  $C_k$  cada uno de ellos rodeando el anterior, la familia de trayectorias asociadas unen los puntos  $\psi_k(\theta)$  de  $C_k$  con los puntos  $\psi_{k+1}(\theta)$  de  $C_{k+1}$  para cada  $k$ .

Haciendo  $k \rightarrow \infty$ , las curvas  $C_k$  se aproximan a la cuenca de atracción de  $w$ . Por el lema 4.27 la frontera de la cuenca de atracción de  $w$  no es más que el conjunto de Julia  $J(f_c)$ . Como  $|f_c'(z)| > \gamma$  para algún  $\gamma > 1$  fuera de  $C_1$ , se sigue que  $f_c^{-1}$  es una contracción cerca de  $J$ . Luego la longitud de la trayectoria que une  $\psi_k(\theta)$  con  $\psi_{k+1}(\theta)$  converge a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$  a razón geométrica. Por tanto,  $\psi_k(\theta)$  converge uniformemente a una función continua  $\psi(\theta)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , y  $J$  es la curva cerrada dada por  $\psi(\theta)(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ .

Falta probar que  $\psi$  es una curva simple cerrada. Supongamos que  $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$ . Sea  $D$  la región rodeada por  $C_0$ . La frontera de  $D$  permanece acotada bajo iteraciones de  $f_c$ , luego por el principio del módulo máximo  $D$  permanece acotado bajo iteraciones de  $f$ . Por el lema 4.21 el interior de  $D$  no puede contener ningún punto de  $J$ . Entonces  $\psi(\theta) = \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$  para todo  $\theta$  entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Se sigue que  $\psi(\theta)$  no tienen punto de auto-intersección.  $\square$

Por extensión del argumento anterior, si  $c$  está en el cardioide principal de  $M$  (i.e.,  $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}e^{i\theta})$ , con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), entonces  $J(f_c)$  es una curva simple cerrada. A veces se usa el término de quasi-círculos para referirse a estas curvas. Evidentemente,  $J(f_c)$  es una curva fractal si  $c > 0$  y se puede probar que para  $c$  pequeño, la dimensión es dada por (ver [5, p. 212]),

$$s = \dim_H J(f_c) = 1 + |c|^2/4 \log 2 + \text{términos de orden } |c|^3 \text{ y orden mayor.}$$

Además,  $0 < \mathcal{H}_s(J) < \infty$ , con  $\dim_H J(f_c)$  dada por una función analítica real.

### Valores $c$ para los que $f_c$ tiene una órbita periódica de atracción.

Distinguimos ahora la parte del conjunto de Mandelbrot correspondiente a los  $c$  tales que  $f_c$  tiene una órbita periódica. Para determinar las órbitas de periodo 2, es decir los puntos fijos de  $f_c^2$  (no tienen por que ser puntos fijos de  $f_c$ ). Observamos que,

$$f_c^2(z) - z = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1).$$

Las raíces del primer factor son los puntos fijos de  $f_c$ . El par de raíces del segundo factor son los puntos que están en la órbita de periodo 2. Vemos que la órbita es de atracción si  $|c + 1| < \frac{1}{4}$ , es decir, si está en disco principal de  $M$  lindante con el cardioide.

### Valores $c$ para los que se tienen órbitas de atracción de orden superior.

El interior del conjunto de Mandelbrot solo tiene dos componentes que se pueden calcular explícitamente. Estos son los valores  $c$  para los que  $f_c$  tiene un punto fijo o una órbita de atracción periódica.

Por ejemplo, estudiemos los puntos de periodo 3. Se trata de los ceros del polinomio de grado 6,

$$(f_c^3 - z)/(z^2 - z + c) = z^6 + z^5 + (3c + 1)z^4 + (2c + 1)z^3 + (3c^2 + 3c + 1)z^2 + (c^2 + 2c + 1)z + c(c + 1)^2 + 1.$$

Pero este polinomio no se puede factorizar en dos polinomios de grado 3. Por tanto esto no nos proporciona una descripción de las órbitas de atracción de orden 3. Sin embargo, sí podemos estudiar los valores de  $c$  para los que obtenemos órbitas de super-atracción (i.e.,  $(f^3)' = 0$ ). En este caso el termino constante debe desaparecer, es decir tenemos que  $1 + c(c + 1)^2 = 0$ . Luego tenemos como soluciones aproximadas  $c = -0,1226 \pm 0,7449i$  y  $c = -1,7549$ .

Los valores de  $c$  para los que obtenemos órbitas de atracción pertenecen a subconjuntos abiertos del conjunto de Mandelbrot (en particular se trata de todas las "gotas" que tocan las dos componentes principales). Por ejemplo para  $c = -i$ ,  $0 \rightarrow -i \rightarrow -1 - i \rightarrow i \rightarrow -1 - i \rightarrow i \rightarrow \dots$ . Después de dos pasos preliminares se alcanza una órbita de periodo 2. Luego  $-i \in M$ . Por otra parte si la iteración  $z \mapsto z^2 - i$

tuviera una órbita de atracción (exceptuado  $\infty$ ), entonces la órbita de 0 debería converger a ésta. Concluimos que no hay ningún punto de atracción y por lo tanto no hay ninguna cuenca de atracción. Debido a su aspecto al conjunto de Julia asociado se le llama dendrita.

### Análisis experimental.

A continuación listamos valores de  $c$  para los que el conjunto de Julia  $J(f_c)$  es especialmente interesante ya sea por sus propiedades topológicas o por las propiedades como sistema dinámico. Ordenamos estos valores en 4 subsecciones. En la página siguiente listamos todos valores de las 4 subsecciones, pero primero explicamos la notación usada.

- (a) ‘FP’: ‘Punto fijo’, los valores de  $c$  corresponden al cardioide principal del conjunto de Mandelbrot.
- (b) ‘cyc  $k$ ’: ‘ciclo de periodo  $k$ ’, los valores de  $c$  corresponden a los discos directamente conectados con cardioide. Sus conjuntos de Julia tienen un punto fijo que es un punto frontera de  $k$  componentes de la cuenca de atracción. La órbita de atracción deambula ciclicamente a través de estas  $k$  componentes.
- (c) ‘per  $2 \cdot 3$ ’: Para estos valores de  $c$  correspondientes a las gotas lindantes con el disco principal de  $M$  tenemos un atractor de periodo 6.
- (d) ‘per  $3 \cdot 2$ ’: Los valores de  $c$  corresponden con la gota más grande unida a la gota de periodo 3 lindante con el cardioide. Su atractor también tiene periodo 6 pero el conjunto abierto en el cuál la órbita de atracción se mueve es diferente en los casos ‘per  $3 \cdot 2$ ’ y ‘per  $2 \cdot 3$ ’.
- (e) ‘tch 1-2’: El valor de  $c$  es un punto de la frontera entre el cardioide y el disco principal.
- (f) En la subsección de dendritas ‘ev per 2’ significa ‘eventualmente periodica con periodo 2’.
- (g) Finalmente si  $c \notin M$  entonces el conjunto de Julia es un conjunto de Cantor totalmente desconexo y no hay forma fácil de caracterizar los diferentes tipos de comportamiento.

## Subsección de Atractores

C-valores	Nombre Popular	Comportamiento
$0,0 + 0,0i$	Circle	FP
$0,0 + 0,0i$	Rough Circle	FP
$-0,127 + 0,6435i$	Near-Rabbit	FP
$0,353 - 0,1025i$	Near-Dragon	FP
$-0,7455 + 0,0i$	Near San Marco	FP
$-1,0 + 0,0i$		cyc 2
$-1,0 + 0,2i$		cyc 2
$-0,1227 + 0,7545i$	Rabbit	cyc 3
$-1,756 + 0,0i$	Airplane	cyc 3
$0,2818 + 0,5341i$		cyc 4
$-1,3136 + 0,0i$		per $2 \cdot 2$
$0,3795 + 0,3386i$		cyc 5
$-0,5045 + 0,5659i$		cyc 5
$0,3909 + 0,2159i$		cyc 6
$-0,1136 + 0,8636i$		per $3 \cdot 2$
$-1,1409 + 0,2409i$	Rabbit's Shadow	per $2 \cdot 3$
$0,3773 + 0,1455i$		cyc 7
$0,1205 + 0,6114i$		cyc 7
$0,36 - 0,1i$	Dragon	cyc 8
$-0,3614 + 0,6182i$		cyc 8
$0,3273 + 0,5659i$		per $4 \cdot 2$
$-1,0 + 0,2659i$		per $2 \cdot 4$
$-1,3795 + 0,0i$	Rabbit Triplets	per $2 \cdot 2 \cdot 2$
$-0,0318 + 0,7932i$	Rabbit Triplets	per $3 \cdot 3$
$0,0500 + 0,6318i$		cyc 10
$0,4068 + 0,3409i$		per $5 \cdot 2$
$-0,5341 + 0,6023i$		per $5 \cdot 2$
$-0,9205 + 0,2477i$		per $2 \cdot 5$
$-1,2114 + 0,1545i$		per $2 \cdot 5$
$-0,6977 + 0,2828i$		cyc 11
$-0,4864 + 0,6023i$	Quintuple Rabbits	per $5 \cdot 3$
$-0,65842566307252 - 0,449800525145595i$	SuperAttractor	per 21

## Subsección Entre Atractores

C-valores	Nombre Popular	Comportamiento
$-0,75 + 0,0i$	San Marco	tch 1-2
$-1,25 + 0,0i$	San Marco's Shadow	tch 2-2-2
$-0,125 + 0,64952i$	Balloon Rabbit	tch 1-3
$0,35676 + 0,32858i$		tch 1-5

## Subsección Componente Abierta Simplemente Conexa

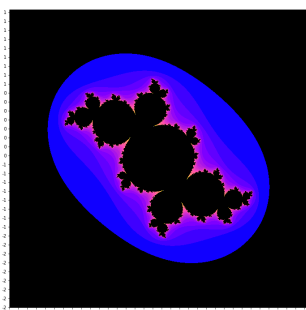
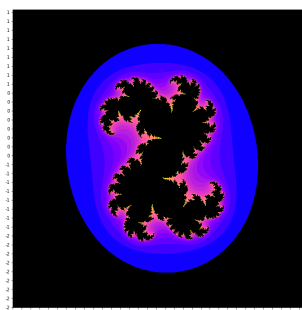
C-valores	Nombre Popular	Comportamiento
$0,0 + 1,0i$	Dendrite	ev per 2
$-0,2282554936539 + 1,1151425080399i$	Dendrite	FP (tras 3 iteraciones)
$-1,2392255553895 - 0,4126021816020i$	Dendrite	per 3
$0,4245127190500 - 0,2075302281667i$		FP (tras 7 iteraciones)

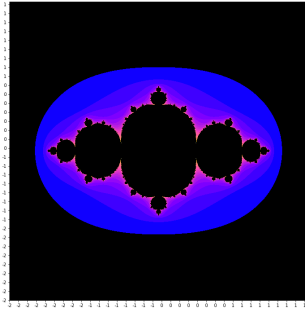
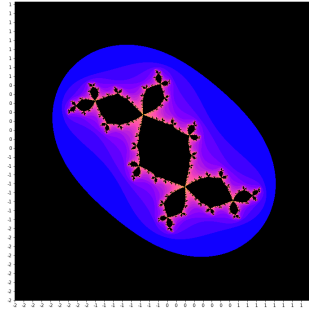
## Subsección Fuera del conjunto de Mandelbrot

C-valores	Nombre Popular
$0,765 + 0,12i$	Cantor Set
$0,4 - 0,25i$	Cantor Set
$0,4253 - 0,2078i$	Cantor Set

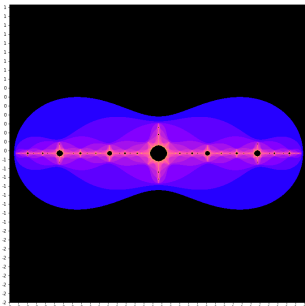
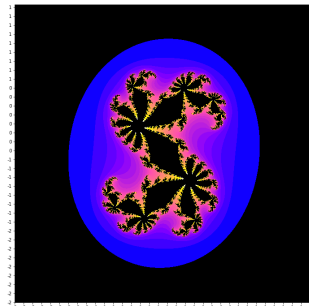
## Computo de conjuntos de Julia interesantes

Como en el apéndice E hemos desarrollado una serie de programas que computan los conjuntos de Julia. En general son muy parecidos a los que computan el conjunto de Mandelbrot. Ahora mostramos imágenes de algunos de los conjuntos de Julia listados anteriormente.

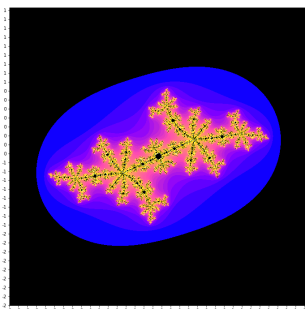
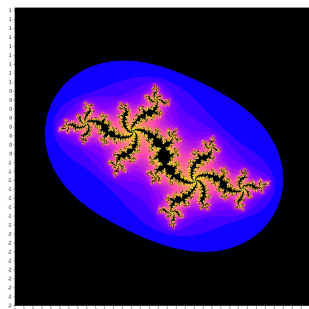
(a)  $-0.127+0.6435i$ (b)  $0.353-0.1025i$

(a)  $-0.7455+0.0i$ (b)  $0.1227+0.74545i$ 

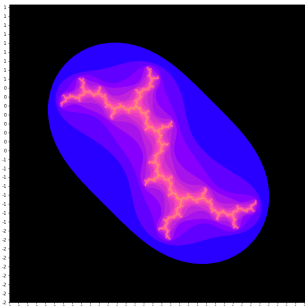
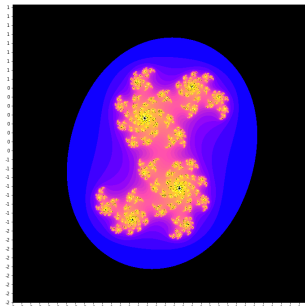
## Conjuntos de Julia 2

(a)  $-1.756+0.0i$ (b)  $0.36-0.1i$ 

## Conjuntos de Julia 3

(a)  $-0.65842566307252-0.449800525145595i$ (b)  $-0.8664+0.6023i$ 

## Conjuntos de Julia 4

(a)  $0.0+1.0i$ (b)  $0.4-0.25i$ 

Conjuntos de Julia 5



# Bibliografía

---

- [1] BARNSELY, M. *Fractals everywhere*. Academic Press, 1993.
- [2] CHERAGHI, D. *One dimensional real and complex dynamics: Lecture notes for Mathematics Taught Course Centre*, 2014. URL: <http://wwwf.imperial.ac.uk/~dcheragh/Research/CourseNotes.pdf>
- [3] CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable I*. Springer, 1978.
- [4] CASEY, J. *The First Six Books of the Elements of Euclid*. Logmans, Green & Co, 1885.
- [5] FALCONER, K.J. *Fractal Geometry*. Wiley, 1990.
- [6] FALCONER, K.J. *The Geometry of Fractal Sets*. University of Bangalore Press, 1997.
- [7] FOLLAND, G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*. Wiley, 1999.
- [8] HUREWICZ, W. & WALLMAN, H. *Dimension Theory*. Princeton University Press, 1948.
- [9] KARCHER, H. *The Mandelbrot Set And Its Associated Julia Sets*. URL: [http://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/Julia\\_Sets.pdf](http://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/Julia_Sets.pdf)
- [10] KLEINER, I. *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*. The College Mathematics Journal, 20(4): 282-300. (1989).
- [11] KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford Univ. Press, 1972.
- [12] MANDELBROT, B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. WH Freeman & Co, 1982.
- [13] MILNOR, J. *Dynamics in one complex variable*. Princeton University Press, 2006.
- [14] MUNKRES, J. R. *Topology*. Prentice-Hall, 2000.
- [15] STEIN, E.M & SHAKARCHI, R., *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.

- [16] TAO, T. *A remark on the Kakeya needle problem.* URL: <https://terrytao.wordpress.com/2008/12/31/a-remark-on-the-kakeya-needle-problem/>
- [17] VIBERTO, C. *Équations différentielles et systèmes dynamiques.* École polytechnique, 2003.
- [18] WIENER, N. *I am a mathematician.* MIT Press, 1964.